

# 위상 감쇄 채널에서의 약한 측정 및 보정회전 기반 양자 고밀도 전송 프레임워크

홍준표 · 이현수<sup>†</sup>

국립 금오공과대학교 산업공학과

## Quantum Dense Coding Transfer Framework of Phase Damping Channel System using Weak Measurement and Correction Rotation

Junpyo Hong · Hyunsoo Lee

School of Industrial Engineering, Kumoh National Institute of Technology, Korea

Quantum dense coding is one of the important quantum computing techniques in communication. Quantum dense coding uses a small number of qubits for transmissions using the quantum entanglement state, which can deliver more classical bit data. However, during a transmission process, the coherence and quantum entanglement state may collapse owing to the influence of the embedding noise channel that a common quantum computing system has. This issue results in a decrease in the transmission capacity of quantum dense coding. Several techniques have been studied to reduce the influences of quantum noise channels. However, these research studies assumed limited quantum environment. This study proposes a new and effective framework to prevent the collapse of quantum entanglement states, focusing on a time-correlated phase damping channels. The quantum state is analyzed using quantum weak measurement (WM), and a correction rotation (CR) technique is integrated to restore it to its initial phase. The effectiveness of the proposed framework is demonstrated experimentally with the comparisons with existing quantum noise reduction techniques.

**Keywords:** Quantum Computing, Quantum Dense Coding, Phase Damping Channel, Weak Measurement, Correction Rotation

### 1. 서론

양자 고밀도 코딩은 Bennett CH와 Wiesner SJ(Bennett *et al.*, 1992)에 의해 제안된 방식으로, 초기에 송신자와 수신자 사이에 공유된 얽힘 상태의 큐비트를 이용하여, 송신자가 전송하고자 하는 데이터를 보유하고 있는 큐비트에 양자 연산을 통해 인코딩하게 되면 양자 얽힘 상태의 특성으로 수신자의 큐비트도 그에 따라 변화하게 되는 성질을 이용한다. 그 후 수신자

에게 전송하여 수신자가 가지고 있던 큐비트와 함께 측정을 수행하면 송신자가 단일 큐비트를 보내는 것만으로도 고전 데이터 2비트가 전송된다. 양자 고밀도 코딩은 얽힘 상태의 특성을 사용하지 않으면 구현될 수 없으며 Mattle 등(Mattle *et al.*, 1996)은 광학 실험을 통해 얽힘 광자를 사용하여 양자 밀도 코딩을 실험적으로 구현하였다. 양자 고밀도 코딩으로 전송 가능한 고전 데이터의 양은 관련된 얽힘 상태의 정량적 특성으로 결정된다. 이때, 열린 계에서 양자 상태는 필연적으로 외부

This research study was supported by The Basic Science Research Program through National Research Foundation of Korea (NRF), funded by the Ministry of Education, S. Korea (grant number: NRF-2021R1A2C1008647).

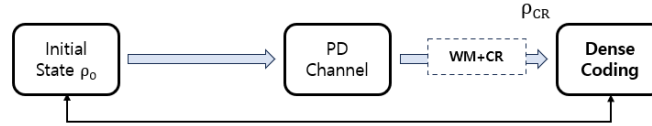
<sup>†</sup> 연락저자 : 이현수 교수, 39177 경상북도 구미시 대학로 61 금오공과대학교 산업공학부 Tel: 054-478-7661, Fax: 054-478-7679,

E-mail : hsl@kumoh.ac.kr

2023년 12월 29일 접수; 2024년 2월 22일 수정본 접수; 2024년 3월 8일 게재 확정.



(a) A general quantum dense coding flowchart



(b) The proposed quantum dense coding using weak measurement and correction rotation

Figure 1. The Proposed Quantum Dense Coding and a General Quantum Dense Coding

환경의 영향을 받게 되고(McMahon, 2007), 이로 인해 결어긋남(decoherence)이 발생할 수 있다. 환경의 노이즈 채널로 인해 발생하는 현상에는 진폭 감쇄(Amplitude Damping, AD), 위상 감쇄(Phase Damping, PD), 진폭-위상 감쇄 등이 있다.

내재된 환경의 노이즈로 인해 발생하는 결어긋남은 얽힘 상태를 붕괴시키는 요소로 작용하게 되는데, 이를 양자 얽힘 돌연소멸(Entanglement Sudden Death, ESD)라고 한다(Yu *et al.*, 2004; Almeida *et al.*, 2007). 얽힘 상태가 붕괴될 경우 양자 밀도 코딩으로 전송 가능한 정보량이 감소하게 되므로 ESD 현상을 막고 얽힘 상태를 보호하는 것이 양자 통신을 구현하는데 중요한 요소라고 할 수 있다. 본 논문에서는 외부 환경에 시간 상관을 따르는 위상 감쇄 노이즈 채널이 존재할 때, 약한 측정 - 보정 회전 기법을(weak measurement - correction rotation, WM-CR) 통한 양자 밀도 코딩의 용량 개선 프레임워크를 제시한다. <Figure 1>의 (a)는 위상 감쇄 노이즈 채널의 영향을 받는 일반적인 양자 밀도 코딩 다이어그램이며, (b)는 본 연구에서 제안하는 WM-CR기법을 사용한 밀도 코딩 다이어그램이다.

보다 자세한 설명은 제3장에서 설명하며, 제안 프레임워크의 효과를 확인하기 위해 여러 사례별로 밀도 코딩 수행 전의 밀도 연산자의 충실도(fidelity)와 밀도 코딩 후의 전송 용량을 비

교한다. 본 논문의 구성은 다음과 같다. 다음 장에서는 다양한 노이즈 채널의 영향을 감소시키는 양자 컴퓨팅 기법들에 대한 선행 연구를 제시하며, 제3장에서는 양자 밀도 코딩과 개선 프레임워크를 설명한다. 제4장에서는 제안된 프레임워크의 시뮬레이션 결과를 통해 우수성을 실증한다.

## 2. 선행연구 고찰

양자 회로는 구현과정에서 실제 물리현상에서 발생하는 다양한 노이즈로 인하여 결어긋남이 일어날 수 있으며, 이를 막기 위한 연구가 활발히 진행되고 있다. 양자 통신 측면에서 양자 노이즈 보정을 위한 다양한 기법들이 제안되어 왔으며 이를 양자 시스템에 적용하여 초기 양자 상태를 온전히 전송하려는 시도가 있어 왔다. 대표적인 방법으로는 양자 되돌림 연산 기법 (quantum measurement reversal, QMR) 이 있다. 단일 큐비트 환경에서 Korotkov(Korotov *et al.*, 2010) 는 양자 되돌림 연산을 사용하여 노이즈 채널에 의한 결어긋남 현상(decoherence)을 감소시키는 방법을 제안했으며, Lee(Lee *et al.*, 2011)는 광학계를 통해 QMR 기법의 실험실증에 성공하였다. 위 연구 결

Table 1. Existing Studies Considering Quantum Noise Channel

Research studies	Application areas	No. of target qubits	Noise channel
Korotov <i>et al.</i> (2010)	Decoherence using QMR on single qubit system	1	AD channel
Lee <i>et al.</i> (2011)	Experimental demonstration of QMR using an optic system	1	AD channel
Kim <i>et al.</i> (2012)	Protecting two qubits' entanglement state using WMR schematic	2	AD channel
Li <i>et al.</i> (2019)	Enhance fidelity of quantum teleportation using WMR with AD channel	2	AD channel
Wang <i>et al.</i> (2023)	Enhance fidelity of quantum teleportation and dense coding capacity with WMR	2	AD channel
Li <i>et al.</i> (2017)	Protecting entanglement for two qubits' state with WMR	2	AD channel
Li <i>et al.</i> (2021)	Dense coding capacity in three types of correlated noise channel with WMR	2	AD, PD, Depolarizing channel
Braczyk <i>et al.</i> (2007)	Restore phase damping using feedback control for single qubit	1	PD channel
Gillett <i>et al.</i> (2010)	Experimental demonstration of feedback control for single qubit	1	PD channel

과를 바탕으로 Kim (Kim *et al.*, 2012)은 양자 상태의 일부만 붕괴시키는 약한 측정을 수행한 두 개의 큐비트를 진폭 감쇄 채널을 적용한 후 양자 되돌림 연산을 사용하는 WMR(weak measurement and reversal) 기법을 제시하였다. Li(Li *et al.*, 2019)는 시간 상관 진폭 감쇄 채널에서 WMR 기법을 사용하여 양자 통신 프로토콜의 노이즈가 억제됨을 충실도를 사용하여 나타내었으며, Wang(Wang, 2023)은 WMR기법을 사용하여 시간 상관 진폭 감쇄 채널에서 양자 고밀도 전송 용량과 양자 순간이동의 충실도가 향상됨을 연구하였다. 다만 Li(Li *et al.*, 2017; Li *et al.*, 2021)의 연구로 WMR 기법이 진폭 감쇄 노이즈 채널에서는 효과적이거나, 위상 감쇄 노이즈 채널에서는 그 효과가 실증적으로 미비한 것으로 나타났다. 따라서, 본 연구에서는 이러한 위상 감쇄 노이즈 채널을 고려한다.

위상 감쇄 채널에 대해 효과적인 보정 기법으로 제안된 것으로는 양자 피드백 기법이 있다. 양자 노이즈 채널을 통과한 큐비트에 측정 강도를 설정하여 약한 측정을 수행한 후, 감쇄된 위상에 맞는 보정 연산을 사용하여 초기 상태에 가깝게 복원하는 기법이다. Braczyk(Braczyk *et al.*, 2007)는 블로흐 구(Bloch sphere)에서 축과 직교하지 않는 단일 큐비트에 위상 감쇄 채널을 적용하여 축 측정과 z축 보정을 실시하는 기법을 제안하였으며, Gillett는 축 측정 후, 축 보정을 실시하여 충실도가 개선됨을 실험실증에 성공하였다(Gillett *et al.*, 2010). Harraz는 단일 큐비트 상황에서 모든 축에 대해 약한 측정과 보정 회전을 실시했을 때 최적의 측정 강도와 회전 강도에 대해 연구하였다(Harraz *et al.*, 2019).

본 연구에서는 이러한 연구들에 기반하여, 다수의 큐비트로 확장하여, 얽힘 상태의 큐비트를 사용하는 회로에서 위상 감쇄 노이즈 채널의 영향을 효과적으로 보정하는 알고리즘을 제안한다. 특히, 약한측정과 보정회전을 동시에 고려하여, 단일 측면을 고려한 기존의 알고리즘들의 한계를 개선하였다.

이를 통해, 노이즈를 교정하는 근사 최적해를 도출하고, 다른 기법들과 비교하여 위상 감쇄 노이즈를 보다 효과적으로 보정함을 보였다.

### 3. 약한 측정 및 보정 회전을 갖는 위상감쇄 보정 채널 프레임워크

<Figure 2>와 <Figure 3>는 각각 양자 고밀도 코딩에 약한 측정-보정 회전 프레임워크를 적용한 양자 회로 다이어그램 및 개략도이다. 본 프레임워크에서는 첫 번째로 양자 고밀도 코딩을 위해 얽힘 상태인 초기 상태  $\rho_0$ 를 설정하고 위상 감쇄를 발생시킨다. 이후 약한 측정을 통해 계의 변화 상태를 측정하고, 비선형 기반의 보정회전을 통해 초기 상태로 복원하는 과정을 거친다.

이후 양자 고밀도 코딩에서 사용되는 양자 게이트를 이용하여 인코딩을 진행한다. 마지막으로 인코딩된 밀도 연산자  $\rho_{CR}^*$ 과 초기상태  $\rho_0$ 을 충실도(Fidelity) 및 홀레보 한계(Holevo bound) (Holevo, 1998)를 사용해 비교함으로써 제안된 프레임워크의 효과를 확인한다. 본 장에서는 각 세부 모듈인 위상 감쇄채널과 초기 상태 설정, 약한 측정, 보정 회전, 충실도에 대해 설명한다.

#### 3.1 위상 감쇄 채널

큐비트(qubit)는 양자 컴퓨팅에서 사용하는 정보 처리의 기본 단위이다. 0 또는 1중 하나의 상태만을 나타낼 수 있는 고전 비트와 달리 큐비트는  $|0\rangle$ 과  $|1\rangle$ 상태일수도 있지만  $|0\rangle$ 과  $|1\rangle$  상태가 선형 조합된 양자 중첩 상태일 수도 있다. 따라서, 일반적인 큐비트는  $|0\rangle$  과  $|1\rangle$  상태의 선형 조합으로 아래와 같이 나타낼 수 있다.

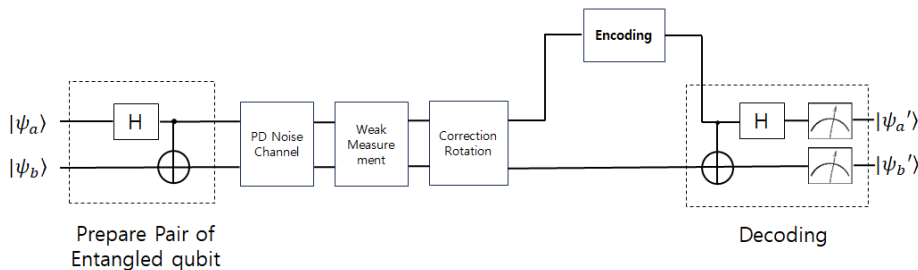


Figure 2. The Quantum Circuit of Dense Coding with Weak Measurement and Correction Rotation

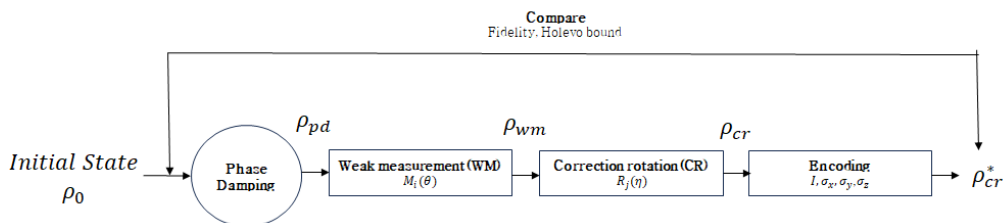


Figure 3. The Schematic Diagram of WM-CR Framework

$$|\psi\rangle = \alpha \cdot |0\rangle + \beta \cdot |1\rangle \quad (1)$$

이때  $\alpha$ 와  $\beta$ 는 상태의 진폭으로 해석가능하며, 절대값의 제곱으로 측정 시 각 상태가 발견될 확률로 해석된다. 밀도 연산자(density operator)는 양자 연산을 위하여 식(2)와 같은 밀도행렬을 통해 구성한다.

$$\rho = \sum_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i| \quad (2)$$

위상 감쇄 채널은 양자 시스템이 외부 환경과 상호 작용하면서 발생하는 양자적 변화 중 하나로 양자 상태의 상대적 위상에 대한 정보가 소실되지만 에너지는 소실되지 않는 특징을 가진다. 본 연구에서는 이러한 위상 손실을 위하여 다음과 같은 위상감쇄 방식을 적용한다.

우선 초기 상태인 두개의 큐비트로 구성된 밀도 연산자 식 (3)과 같이 파울리 행렬(Pauli matrix)을 사용하여 얽힘 상태로 구성한다.

$$\rho_0 = \frac{1}{4} \left( I \otimes I + \sum_{i=1}^3 c_i \sigma_i^A \otimes \sigma_i^B \right) \quad (3)$$

여기서  $I$ 는 단위 행렬,  $\sigma_i^A$ 와  $\sigma_i^B$ 는 파울리 행렬( $\sigma_1 = \sigma_x, \sigma_2 = \sigma_y, \sigma_3 = \sigma_z$ ),  $c_i$  ( $0 \leq |c_i| \leq 1$ )는 밀도 연산자  $\rho_0$ 을 정규화(normalization)하는 계수이다. 본 논문에서는 초기 상태를 대표적인 얽힘 상태인 벨 상태(Bell state)로 설정하기 위해  $|c_1| = |c_2| = |c_3|$ 로 정의한다.

본 연구에서는 시간 상관 위상 감쇄 채널을 구현하기 위하여, 식 (4)와 같이 변환한다(Macchiavello *et al.*, 2002).

$$\rho_{pd} = \epsilon(\rho_0) = (1-\mu) \sum_{i,j=0}^1 E_{ij} \rho_0 E_{ij}^\dagger + \mu \sum_{k=0}^1 A_k \rho_0 A_k^\dagger \quad (4)$$

이때,  $\mu$  ( $0 \leq \mu \leq 1$ )은 위상 감쇄 채널의 시간 상관 계수이다.  $E_{ij} = E_i \otimes E_j$  ( $i, j = 0, 1$ )는 2큐비트계에서 중심계에 대한 위상 감쇄 채널의 영향을 표현하는 크라우스(Kraus) 연산자이며 아래와 같이 나타낸다. 여기서  $\sigma_z$ 는 파울리 z행렬이다.

$$E_0 = \sqrt{\frac{1+r}{2}} I \quad (5)$$

$$E_1 = \sqrt{\frac{1-r}{2}} \sigma_z \quad (6)$$

$r$  ( $0 \leq r \leq 1$ )은 위상 감쇄 채널의 세기를 나타낸다. 또한,  $A_k$ 는 채널의 메모리로 인한 상관 노이즈로 식 (7), 식 (8)과 같다 ( $k=0, 1$ ).

$$A_0 = \sqrt{\frac{1+r}{2}} I \otimes I \quad (7)$$

$$A_1 = \sqrt{\frac{1-r}{2}} \sigma_z \otimes \sigma_z \quad (8)$$

이를 밀도연산자 측면에서 다시 고려하면, 식 (9)와 표현된다.

$$\rho_{pd} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ 0 & d & c & 0 \\ b & 0 & 0 & a \end{pmatrix} \quad (9)$$

$$a = \mu(c_3 + 1) - (\mu - 1)(c_3 + 1),$$

$$b = \mu(c_1 - c_2) - (\mu - 1)(c_1 - c_2)r^2,$$

$$c = (\mu - 1)(c_3 - 1) - \mu \sum (c_3 - 1),$$

$$d = \mu(c_1 + c_2) - (\mu - 1)(c_1 + c_2)r^2$$

본 연구에서는 이러한 일반적인 위상감쇄가 일어날 때, 이를 보정하기 알고리즘을 제시한다.

### 3.2 약한 측정(Weak measurement)

양자 밀도 코딩을 하기 위해서는 얽힘 상태의 양자 계 및 위상 감쇄 채널의 영향을 확인하기 위한 측정이 필요하다. 일반적인 양자 사영 측정(quantum projective measurement)의 경우 측정 후, 특정 계가 측정 결과로 소멸되어 감쇄 채널의 영향을 파악할 수 없다는 단점을 지닌다. 약한 측정은 다른 양자 측정과 달리 양자 상태를 부분적으로만 붕괴시켜, 전체적인 위상 감쇄 채널의 영향 등을 측정할 수 있는 방법이다. 이를 위해 블로흐 구 상  $x, y, z$ 축에 대한 약한 측정 연산자를 정의하고, 이를 조합하여, 전체적인 계의 측정을 실시한다(Gillett *et al.*, 2010).

$$M_{x\pm}(\theta) = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) (|\pm\rangle\langle\pm|) + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) (|\mp\rangle\langle\mp|) \quad (10)$$

$$M_{y\pm}(\theta) = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) (|\pm i\rangle\langle\pm i|) + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) (|\mp i\rangle\langle\mp i|) \quad (11)$$

$$M_{z+}(\theta) = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) (|0\rangle\langle 0|) + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) (|1\rangle\langle 1|) \quad (12)$$

$$M_{z-}(\theta) = \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) (|0\rangle\langle 0|) + \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) (|1\rangle\langle 1|) \quad (13)$$

이때,  $\theta \in \left\{0, \frac{\pi}{2}\right\}$ ,  $\sum_m M_m^\dagger M_m = I$ 이며,  $|\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle \pm |1\rangle)$ 다.  $M_{x\pm}(\theta)$ 는 x축을 기준으로 계를 측정하는 연산자이며,  $M_{y\pm}(\theta)$ 는 y축,  $M_{z\pm}(\theta)$ 는 z축을 따라 계를 측정하는 연산자이다. 밀도 연산자  $\rho_{pd}$ 가 주어졌을 때, 임의의 축  $\alpha$ 에 대한 약한 측정 결과  $\rho_{wm}$ 은 아래와 같이 나타낼 수 있다.

$$\rho_{wm} = WM(\rho_0, \theta) = \sum_{i,j=1}^2 M_i(\theta) \rho_{pd} M_j(\theta)^\dagger \quad (14)$$

이때,  $M_1(\theta) = M_{a+} \otimes M_{a+}$ ,  $M_2(\theta) = M_{a-} \otimes M_{a-}$ 이며,  $a = x, y, z$ 이다. 약한 측정 강도를  $w = \cos(\theta/2)$ 라고 했을 때, 만약  $w=0$ 일 경우 측정이 되지 않으며,  $w=1$ 일 경우 일반적인

사영 측정 연산자가 된다.  $0 < w < 1$  ( $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ )일 때 약한 측정으로 기술된다. 본 프레임워크에서는 위상의 노이즈 측정을 위해 이러한 약한 측정을 적용한다.

### 3.3 보정 회전(Correction rotation)

보정 회전은 앞절에서 설명한 약한 측정 후 변화된 계를 초기 상태로 복원하기 위해 사용하는 블로흐 구 기반의 회전 연산으로(rotation operator) 임의의 축  $\beta$ 에 대한 보정 회전 이후의 밀도 연산자  $\rho_{cr}$ 는 식 (15)과 같다

$$\rho_{cr} = CR(\rho_{wm}, \eta) = \sum_{k,l=1}^2 R_k(\theta) \rho_{wm} R_l(\theta)^\dagger \quad (15)$$

이 때  $\eta$ 는 보정 회전 각도로 블로흐 구에서의 지정된 축을 기준으로 추가적으로 회전시키는 각도를 의미하며,  $R_1(\eta) = R_\beta(+\eta) \otimes R_\beta(+\eta)$ ,  $R_2(\eta) = R_\beta(-\eta) \otimes R_\beta(-\eta)$ ,  $\beta = x, y, z$ 이다. 각 축에 대한 회전 연산자는 아래와 같다(McMahon, 2007).

$$R_x(\pm \eta) = \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\eta}{2}\right) & \mp i^* \sin\left(\frac{\eta}{2}\right) \\ \pm i^* \sin\left(\frac{\eta}{2}\right) & \cos\left(\frac{\eta}{2}\right) \end{bmatrix} \quad (16)$$

$$R_y(\pm \eta) = \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\eta}{2}\right) & \mp \sin\left(\frac{\eta}{2}\right) \\ \pm \sin\left(\frac{\eta}{2}\right) & \cos\left(\frac{\eta}{2}\right) \end{bmatrix} \quad (17)$$

$$R_z(\pm \eta) = \begin{bmatrix} e^{\pm i \frac{\eta}{2}} & 0 \\ 0 & e^{\mp i \frac{\eta}{2}} \end{bmatrix} \quad (18)$$

이제, 위상 감쇄 채널 통과 후의 밀도 연산자인  $\rho_{pd}$ 를 사용하면, 식 (19)와 같이 표현가능하다.

$$WMCR(\rho_{pd}, \theta, \eta) = \sum_{i,j,k,l=1}^2 R_k(\eta) (M_i(\theta) \rho_{pd} M_j(\theta)^\dagger) R_l(\eta)^\dagger \quad (19)$$

예시로 약한 측정은 Z축, 보정회전은 Y축으로 진행했을 때, 보정 회전 후의 밀도 행렬의 각 항은 식 (20)과 같다.

$$\rho_{cr} = \frac{1}{p} \begin{pmatrix} a' & 0 & 0 & b' \\ 0 & c' & d' & 0 \\ 0 & d' & c' & 0 \\ b' & 0 & 0 & a' \end{pmatrix}, \quad (20)$$

$$a' = \frac{\cos^2 \theta (\cos^2 \eta a + \sin^2 \eta b) + \sin^2 \theta (\cos^2 \eta b + \sin^2 \eta a)}{(2a + 8\cos^2 \theta \sin^2 \theta)c},$$

$$b' = \frac{1}{p} \frac{\cos^2 \theta (\cos^2 \eta b + \sin^2 \eta a) + \sin^2 \theta (\cos^2 \eta a + \sin^2 \eta b)}{(2a + 8\cos^2 \theta \sin^2 \theta)c},$$

$$c' = \frac{\cos^2 \theta (4(c-d)\cos^2 \theta \sin^2 \theta) + \sin^2 \theta (4(d-c)\cos^2 \theta \sin^2 \theta)}{(2a + 8\cos^2 \theta \sin^2 \theta)c},$$

$$d' = \frac{\cos^2 \theta (4(d-c)\cos^2 \theta \sin^2 \theta) + \sin^2 \theta (4(c-d)\cos^2 \theta \sin^2 \theta)}{(2a + 8\cos^2 \theta \sin^2 \theta)c},$$

$$p = 8\sin^2 \theta \frac{\cos^2 \eta a + \sin^2 \eta b - (4(d-c)\cos^2 \theta \sin^2 \theta)}{(2a + 8\cos^2 \theta \sin^2 \theta)c} + 8\cos^2 \theta \frac{\cos^2 \eta b + \sin^2 \eta a + (4(c-d)\cos^2 \theta \sin^2 \theta)}{(2a + 8\cos^2 \theta \sin^2 \theta)c}$$

이렇게 표현된 보정식을 이용해, 원상태의 큐비트 상태를 복원한다.

### 3.4 양자 고밀도 코딩

양자 고밀도 코딩 과정은 <Figure 2>에서 제시한 다이어그램을 따른다. 우선 큐비트  $|\psi_a\rangle$  와  $|\psi_b\rangle$  를 아다마르 게이트(hadamard Gate)를 사용해 얽힘 상태로 만들고 송신자 A와 수신자 B가 공유한다. 그 이후 A가 가진 큐비트  $|\psi_a\rangle$  를 양자 게이트를 사용해 인코딩하여 B에게 송신한다. B는 자신이 가진 큐비트  $|\psi_b\rangle$  와 A로부터 받은 큐비트를 같이 측정하여 A가 보내고자 하는 고전 데이터를 확인한다. 2비트(bit) 고전 데이터 인코딩을 위해 사용하는 양자 게이트들은 <Table 2>와 같다.

Table 2. Encoding Rules of Quantum Dense Coding

Message	Applied Gate	Resulting states
00	$I$	$ x\rangle$
01	$\sigma_x$	$e^{i\pi x} x\rangle$
10	$\sigma_y$	$ x+1 \pmod{2}\rangle$
11	$\sigma_z$	$ x\rangle = e^{i\pi x} x+1 \pmod{2}\rangle$

초기 밀도 연산자  $\rho_0$ 을 밀도 코딩했을 때, 변환된 밀도 연산자  $\rho^*$ 는 아래와 같이 나타낼 수 있다(Hiroshima, 2001).

$$\rho^* = \frac{1}{4} \sum_0^4 (\sigma_i \otimes I) \rho_0 (\sigma_i^\dagger \otimes I) \quad (21)$$

양자 고밀도 코딩의 전송 용량, 즉 전달 가능한 고전 데이터 비트 수  $\chi$ 는 홀레보 한계를 사용하여 식 (22)와 같이 표현한다.

$$\chi = S(\rho^*) - S(\rho_0) = 4 \frac{(a'+c')}{2} \log_2 \left( \frac{(a'+c')}{2} \right) + \sum_i \lambda_i \log_2 \lambda_i$$

$$\lambda_{1,3} = a' \pm b' \quad (22)$$

$$\lambda_{2,4} = c' \pm d'$$

이때  $\rho^*$ 는 밀도 코딩 된 밀도 연산자,  $\rho_0$ 는 초기 상태의 밀도 연산자이다.  $S$ 는 폰 노이만 엔트로피(Von Neumann entropy)로 밀도 행렬의 고유값  $\lambda_i$ 를 사용하여 식 (23)과 같이 표현한다.

$$S(\rho) = - \sum_i \lambda_i \log_2 \lambda_i \quad (23)$$

이를 통해, 전송용량을 측정하고 비교하여 전송 프레임워크의 우수성을 확인한다.

### 3.5 충실도(Fidelity)

충실도는 어떤 양자 상태가 다른 양자 상태와 얼마나 가까운지를 나타내는 값으로 아래와 같이 나타낸다. 본 논문에서는 WM-CR 프레임워크를 적용한 양자 상태를 초기 상태와 비교하여 얼마나 기존 상태로 복원했는지 알아보는 척도로서 사용한다. 두 밀도 연산자  $\rho_A, \rho_B$  가 있을 때 충실도는 대각합을 사용하여 아래와 같이 주어진다.

$$F(\rho_A, \rho_B) = \text{Tr}(\sqrt{\sqrt{\rho_A} \rho_B \sqrt{\rho_A}})^2 \quad (24)$$

이때  $0 \leq F(\rho_A, \rho_B) \leq 1$ 이며, 같은 상태일 경우 1이고 겹치는 부분이 전혀 없으면 0이 된다.

## 4. 보정 시뮬레이션 및 기존 기법들과의 비교

본 논문에서 사용한 WM-CR 프레임워크의 효과를 검증하기 위해, 3장에서 기술한 임의의 위상 감쇄 노이즈를 설정한 후 양자 충실도와 양자 고밀도 코딩 전송 용량을 구해 보았다. 복원된 밀도 연산자가 초기상태와 얼마나 유사한지를 초기 밀도연산자  $\rho_0$ 와 프레임워크를 사용한 밀도연산자  $\rho_{cr}$  사이의 충실도를 통해 확인하고, 위상 감쇄된 밀도연산자와의 양자 고밀도 코딩 전송 용량을 홀레보 한계를 사용하여 비교하여 개선 효과가 있는지 확인해 보았다.

우선 WM-CR 기법에서 사용되는 약한 측정 강도와 보정회전 각도의 최적해를 근사하기 위해, 본 연구에서는 식 (25)와 같은 목적함수와 제약사항으로 구성된 비선형 최적화 모델을 사용하였다.

$$\min_{\theta, \eta} f(\theta, \eta) = \sum_{\mu, r} \left( 2 - \left( 4 \frac{(a'+c')}{2} \log_2 \left( \frac{(a'+c')}{2} \right) + \sum_i \lambda_i \log_2 \lambda_i \right) \right)^2 \quad (25)$$

*s. t.*  $g(\theta) < 1$

**Table 3.** Definition of Parameters and Decision Variables

Parameters	Definitions
$\mu$	The strength of time-correlated memory effect
$r$	The strength of the decoherence.
Decision Variables	Definitions
$\theta$	The strength of weak measurement.
$\gamma$	The strength of phase correction.

목적함수는 2개의 큐비트가 얽힘 상태일 때의 최대 전송용량  $\chi(\rho_0) = 2$ 와 WM-CR 후의 전송용량  $\chi(WMCR(\rho_{pdr}, \theta, \eta))$

의 편차 제곱합을 최소화하는 함수이다.  $g(\theta) = \cos(\theta/2)$ 는 약한 측정을 수행하기 위해 측정강도의 설정하는 함수로서, 제약조건을 통해 측정 강도를  $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$  범위로 제한하여 약한 측정을 수행할 수 있도록 설정하였다. 만약  $g(\theta) = 0$ 일 경우 측정이 되지 않으며,  $g(\theta) = 1$ 일 경우 일반적인 사영 측정 연산자가 된다.  $0 < g(\theta) < 1$ 일 때 약한 측정으로 기술된다. 목적함수를 최소화 하는 비선형 해를 도출하기 위한 솔버로서 MATLAB 2023 Rb버전의 내장 비선형 함수인 fmincon 함수를 사용하였다.  $\mu$ 와  $r$ 을 0~1 범위내에서 0.01씩 증가시키며, 생성한 샘플기반의 영역에서 해당 솔버를 사용하여 결정변수의 해를 구하였다. 도출된 약한 측정과 보정 회전의 각 조합에 대한 비선형해는 <Table 4>에서 확인할 수 있다.

**Table 4.** Corrected Rotation Angles using Nonlinear Programming

Axis		Value	
WM	CR	$\theta$	$\gamma$
X	Y	1	1
X	Z	1	1
Y	X	0.7854	0.7425
Y	Z	0.7854	0.7425
Z	X	0.7853	0.7854
Z	Y	0.1	0.7604

위상 감쇄 채널에서 양자 고밀도 코딩의 전송용량을 극대화하기 위해 각 조합 별 해를 사용하여  $r$ 값에 대한 충실도와 전송 용량을 도출하였으며, 그 중  $\mu$ 의 중간값인  $\mu = 0.5$ 일 때의 충실도 및 전송 용량은 <Table 5>와 <Table 6>에서 확인할 수 있다.

**Table 5.** Fidelity using the Proposed Framework

$r$	Axis					
	$X-Y$	$X-Z$	$Y-X$	$Y-Z$	$Z-X$	$Z-Y$
0	0.7500	0.7839	0.7500	0.7500	0.7500	0.9992
0.2	0.7600	0.7930	0.7600	0.7600	0.7600	0.9992
0.4	0.7900	0.8198	0.7900	0.7900	0.7900	0.9993
0.6	0.8400	0.8639	0.8400	0.8400	0.8400	0.9995
0.8	0.9100	0.9244	0.9100	0.9100	0.9100	0.9998
1	1	1	1	1	1	1

**Table 6.** Transmission Capacity using the Proposed Framework

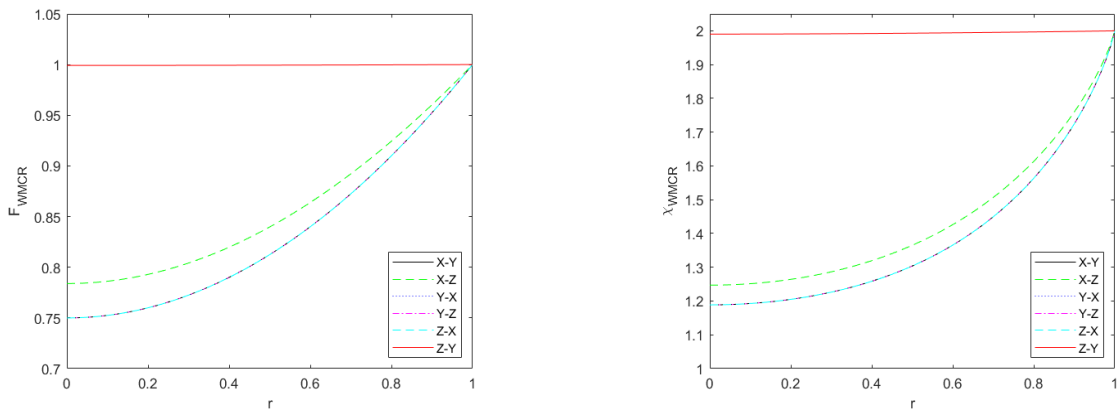
$r$	Axis					
	$X-Y$	$X-Z$	$Y-X$	$Y-Z$	$Z-X$	$Z-Y$
0	1.1887	1.2471	1.1887	1.8887	1.887	1.9903
0.2	1.2050	1.2642	1.2050	1.250	1.2050	1.9907
0.4	1.2585	1.3195	1.2585	1.2585	1.2585	1.9920
0.6	1.3657	1.4262	1.3657	1.3657	1.3657	1.9941
0.8	1.5635	1.6135	1.5635	1.5635	1.5635	1.9967
1	2	2	2	2	2	2

<Figure 4>는  $\mu = 0.5$  일 때  $r$ 을 0부터 1까지 0.01씩 증가시키며 시뮬레이션한 그래프이다. 위에서 확인했던 대로 Z-Y > X-Z > X-Y = Y-X = Y-Z = Z-X 순으로 같은  $r$  값을 가질 때 충실도가 1, 전송용량이 2에 가까운 것을 알 수 있다. 따라서, 해당 시뮬레이션 상황에서 약한 측정은 Z축, 보상 회전은 Y축,  $\theta = 0.1, \eta = 0.7854$  로 WM-CR기법을 적용하면 위상 감쇄 채널의 영향을 최소화하고 전송 용량을 극대화 할 수 있다. 이는 블로흐 구에서의 초기 위상 셋팅값과 연관되어, 해당 위상에서 Z축과 Y축에 대한 회전 이동간 변환이 주요 요인으로 작용하였음을 보여준다.

앞서 도출해낸 조합 및 최적해의 효과를 확인하기 위해 다

른 노이즈 감소 기법과 비교해 보았다. <Figure 5>는 시간 상관 계수  $\mu$ , 위상 감쇄 채널의 세기  $r$ 에 따른 양자 고밀도 코딩 전송 용량의 변화를 나타낸다. 각각 (a) 위상 감쇄 채널만 존재하는 경우, (b) WMR기법을 사용한 경우, (c) WM-CR기법을 Z-Y 조합에 임의의 값으로 파라미터를 설정한 경우( $\theta, \gamma = 0.2$ ), (d) WM-CR기법을 Z-Y 조합에 도출된 해를 적용한 경우이다.

(b)에서 사용된 WMR기법(weak measurement and measurement reversal)은 약한 측정과 양자 되돌림 연산을 통해 진폭 감쇄 노이즈를 억제하는데 효과적인 기법이다. 본 연구에서는 이러한 WMR기법 중 약한 측정과 회전보정 기법을 동시에 융합하여 사용하므로, 약한 측정에 기반한 WMR기법을 사용하



(a) The Fidelity with optimal rotation of each axis combination (b) The Capacity with optimal rotation of each axis combination

Figure 4. The Fidelity and Transmission Capacity

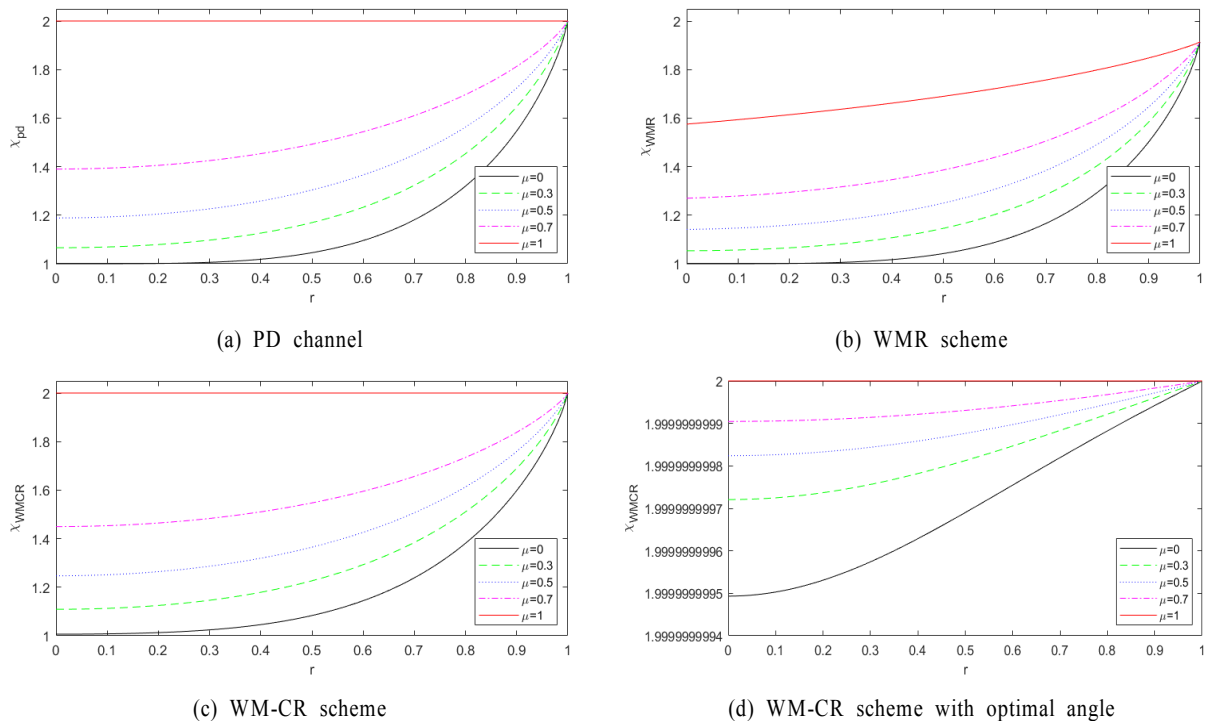


Figure 5. Transmission Capacity of Dense Coding in Comparison Models

는 비교군을 추가적으로 고려하였다. 또한 (c)와 (d)의 경우 동일하게 WM-CR기법을 사용하지만 최적해를 사용한 경우와 아닌 경우를 비교해보기 위해 시뮬레이션을 진행하였다. (a)와 (b)를 비교해 봤을 때 WMR기법의 경우 위상 감쇄 채널의 영향만 받은 경우보다 전송 용량이 감쇄한 것을 볼 수 있다. 따라서 진폭 감쇄 채널에서는 효과적이거나 위상 감쇄 채널에서는 개선 효과가 없다는 것을 확인할 수 있다. (c)의 경우에도 위상 감쇄 채널 노이즈의 영향을 감소시키고 전송 용량이 향상되었지만, 최적해를 사용한 (d)에 비해 개선 효과가 떨어지는 것을 확인할 수 있다.

시뮬레이션 결과 본 논문에서 제시한 약한 측정과 보상 회전 프레임워크를 사용하면 위상 감쇄 채널이 양자 밀도 코딩 전송 용량에 미치는 영향을 최소화 할 수 있다는 것이 확인되었다. 약한 측정과 보상 회전을 통해 위상 감쇄 채널로 변한 양자 상태를 초기 상태로 복원시킬 수 있다는 것은 충실도를 통해서 확인할 수 있었고, 초기 상태로 복원됨으로써 전송 용량 또한 보존할 수 있다는 점도 홀레보 한계를 사용하여 확인할 수 있었다.

## 5. 결론 및 향후 연구

본 연구에서는 양자통신에서 일어나는 여러가지 노이즈 타입 중, 위상감쇄 채널을 대상으로 노이즈 보정에 대한 프레임워크를 제시하였다. 위상 감쇄 채널은 블로흐 구 상에서 각도의 변환 등으로 측정 시 위치가 달라지는 노이즈이며, 진폭 감쇄 채널과 함께 실제 양자통신의 구현에서 주요하게 나타나는 노이즈이다.

본 연구에서는 이를 위하여, 위상 감쇄를 감지할 수 있는 약한 측정 및 이를 토대로 회전 보정을 하고, 분석하는 기법을 전개하였다. 제안된 프레임워크의 우수성을 실증하기 위하여, 시뮬레이션을 통해 여러 종류의 위상 감쇄를 실험하였고, 도출한 방법론을 통하여 그 효과를 보여주었다. 본 연구에서 제안한 WM-CR 기법과 진폭 감쇄 채널에서 효과적인 기법으로 제안된 WMR 기법, 파라미터 도출이 효율적이지 않은 WM-CR기법을 비교했을 때 위상 감쇄 채널의 영향을 효과적으로 제거함을 확인할 수 있었다.

본 논문에서 제안된 프레임워크는 양자 고밀도 코딩에서는 전송용량을 보존하는데 효과적이거나 양자 순간이동(quantum teleportation), 양자 임베딩(quantum embedding)과 같이 큐비트가 가진 정보량의 보존이 중요한 분야에서의 활용 가능성에 대한 확장 연구가 필요하다(Lee and Banerjee, 2023). 또한, 본 논문에서는 Bell state를 사용하여 양자 밀도 코딩 전송 용량이 보존되는지 확인하였으나, 다중의 큐비트를 다루는 Werner state나, GHZ state, W state 등의 확장의 여지를 남긴다. 이는 다수의 큐비트를 고려한 위상감쇄 보정 프레임워크를 위한 향후 연구로서 여겨진다.

## 참고문헌

- Almeida, M. P., de Melo, F., Hor-Meyll, M., Salles, A., Walborn, S. P., Ribeiro, P. S., and Davidovich, L. (2007), Environment-induced sudden death of entanglement, *Science*, **316**(5824), 579-582.
- Bennett, C. H. and Wiesner, S. J. (1992), Communication via one-and two-particle operators on Einstein-Podolsky-Rosen states, *Physical Review Letters*, **69**(20), 2881.
- Brańczyk, A. M., Mendonça, P. E., Gilchrist, A., Doherty, A. C., and Bartlett, S. D. (2007), Quantum control of a single qubit, *Physical Review A*, **75**(1), 012329.
- Gillett, G. G., Dalton, R. B., Lanyon, B. P., Almeida, M. P., Barbieri, M., Pryde, G. J., and White, A. G. (2010), Experimental feedback control of quantum systems using weak measurements, *Physical Review Letters*, **104**(8), 080503.
- Harras, S., Cong, S., and Kuang, S. (2019), Optimal noise suppression of phase damping quantum systems via weak measurement, *Journal of Systems Science and Complexity*, **32**, 1264-1279.
- Hiroshima, T. (2001), Optimal dense coding with mixed state entanglement, *Journal of Physics A: Mathematical and General*, **34**(35), 6907.
- Holevo, A. S. (1998), The capacity of the quantum channel with general signal states, *IEEE Transactions on Information Theory*, **44**(1), 269-273.
- Kim, Y. S., Lee, J. C., Kwon, O., and Kim, Y. H. (2012), Protecting entanglement from decoherence using weak measurement and quantum measurement reversal, *Nature Physics*, **8**(2), 117-120.
- Korotkov, A. N. and Keane, K. (2010), Decoherence suppression by quantum measurement reversal, *Physical Review A*, **81**(4), 040103.
- Lee, J. C., Jeong, Y. C., Kim, Y. S., and Kim, Y. H. (2011), Experimental demonstration of decoherence suppression via quantum measurement reversal, *Optics Express*, **19**(17), 16309-16316.
- Lee, H. and Banerjee, A. (2023), Quantum embedding framework of industrial data for quantum deep learning, *Proc. Winter Simulation Conference 2023*, 2956-2965.
- Li, J. K., Xu, K., and Zhang, G. F. (2021), Dense coding capacity in correlated noisy channels with weak measurement, *Chinese Physics B*, **30**(11), 110302.
- Li, W., He, Z., and Wang, Q. (2017), Protecting distribution entanglement for two-qubit state using weak measurement and reversal, *International Journal of Theoretical Physics*, **56**, 2813-2824.
- Li, Y. L., Zu, C. J., and Wei, D. M. (2019), Enhance quantum teleportation under correlated amplitude damping decoherence by weak measurement and quantum measurement reversal, *Quantum Information Processing*, **18**, 1-11.
- Macchiavello, C. and Palma, G. M. (2002), Entanglement-enhanced information transmission over a quantum channel with correlated noise, *Physical Review A*, **65**(5), 050301.
- Mattle, K., Weinfurter, H., Kwiat, P. G., and Zeilinger, A. (1996), Dense coding in experimental quantum communication, *Physical Review Letters*, **76**, 4656.
- McMahon D. (2007), *Quantum computing explained*, John Wiley & Sons, USA.
- Wang, M., Sun, B., Cao, L., Yang, Y., Liu, X., Wang, X., and Zhao, J. (2023), Improving the Capacity of Quantum Dense Coding and the Fidelity of Quantum Teleportation by Weak Measurement and Measurement Reversal, *Entropy*, **25**(5), 736.
- Yu, T. and Eberly, J. H. (2004), Finite-time disentanglement via



spontaneous emission, *Physical Review Letters*, **93**(14), 140404.

## 저자소개

**홍준표:** 국립 금오공과대학교에서 2022년 학사학위를 취득하였고, 현재 국립 금오공과대학교 산업공학과 석사과정에 재학 중이다. 연구분야는 비선형 최적화, 딥러닝 기반 제어, 쿼텀컴퓨팅 및 응용이다.

**이현수:** 성균관대학교 산업공학과에서 1997년 학사, POSTECH 기계산업공학부에서 2002년 석사를 취득하였고, 2010년 TEXAS A&M University 산업시스템공학과에서 인공지능 분야 박사학위를 취득하였다. 삼성SDS 및 LG전자에서 컨설팅 및 해외 SCM 업무에 종사하였고, 현재 국립 금오공과대학교 산업공학과에 재직 중이다. 연구분야는 쿼텀컴퓨팅, 비선형최적화, 스마트 제조이다.