Journal of the Korean Institute of Industrial Engineers
Vol. 51, No. 1, pp. 83-94, February 2025.
ISSN 1225-0988 | EISSN 2234-6457
https://doi.org/10.7232/JKIIE.2025.51.1.083


# 전환가격 재조정 조건을 갖는 전환사채의 평가

김승환[1] · 임현철[2*†]

[1]전남대학교 수학/통계학과 / [2]전남대학교 수학과

# Numerical Pricing of the Convertible Bonds with Refixing Clauses

Seung Hwan Kim[1] · H. C. Lim[2]

[1]Department of Mathematics and Statistics, Chonnam National University
[2]Department of Mathematics, Chonnam National University

This article presents a mathematical model of the pricing convertible bond with refixing clauses using the jump condition for the path-dependent variable and conditional prices for the different conversion prices. In an empirical study, as expected we observe the price-up effect caused by the refixing clauses. In addition, the interaction between conversion and call provisions by assuming the presence or absence of the refixing clauses. By drawing a conversion boundary, we show that if both conditions exist simultaneously, the conversion provision is dominated by the call provisions.

***Keywords:*** Convertible bonds, Goldman-Sachs, Tsiveriotis and Fernandes, American option, Refixing Clauses

## 1. 서 론

최근 운용자금 확보를 위한 중소 기술기업들의 전환사채 발행이 크게 증가함에 따라 전환사채의 공정가치 평가에 대한 관심이 커지고 있다. 전환사채는 복합금융상품의 일종으로 약정한 시점에 채권 보유자의 청구에 의하여 미리 정한 전환비율에 따라 발행기업의 보통주로 전환할 수 있는 권리가 부여된 파생상품이다. 전환권(Conversion Provision)외에 발행자의 수의상환권(Call Provision), 상환청구권(Put Provision)이 미리 지정한 기간에 조기 권리행사가 가능한 조건부 청구권으로 내재될 수 있으며 이를 프로비전(Provision)이라 지칭한다(이하: 발행자의 수의상환권은 콜옵션, 보유자의 상환청구권은 풋옵션으로 지칭). 프로비전은 권리행사가 가능한 기간이 단속적인 구간으로 있는 버뮤단 형태로 주어지며 전환가격 재조정 조건(Refixing clause)이 추가될 수 있다. 전환사채는 채권의 요소와 지분상품의 요소를 모두 지닌 복합금융상품(메자닌 Mezzanine)이며 다양한 프로비전을 포함하는 경우가 많아 가치평가의 기술적 난이도가 높다.

전환권은 전환사채에 내재된 파생상품으로 회계적으로 자본으로 분류된다. 그러나 전환가격 재조정 조건이 존재하는 경우 전환권은 기업회계기준서 제 1032호(회계적으로 확정 수량과 확정 금액으로 거래되지 않은 자기지분상품인 파생상품은 금융부채로 분류)에 따라 금융부채로 분류된다. 이 경우 전환권의 공정가치의 변동은 재무제표의 손익에 영향을 주게 된다. 주가가 상승하면 전환권의 가치가 높아지고 증가한 전환권의 가치만큼 부채가 증가하게 되어 전환사채를 발행한 기업의 파생상품 평가손실로 기록되는 것이다. 그러나 이 손실은 채권 보유자의 전환권 행사에 따라 자본으로 대체되며, 영업외손익이므로 기업의 실적과는 별개이다. 하지만 많은 투자자들이 이런 손실을 갑작스런 기업의 영업이익 악화로 오해하여 금융시장에 많은 혼선이 일어난 과거 사례들이 있었다. 이런 이유에서 본 연구는 기업의 재무 실무자들이 재조정 조건과 발행자의 콜옵션이 함께 내재된 전환사채의 공정가치를 바르게 파악하는 데 많은 공헌을 할 것으로 기대된다. 해당 조건에 의한 가격변동이 올바르게 적용된 전환사채의 공정가치는 조건에 의한 평가손실 금액을 구체적으로 파악하게 하여 투자자들의 오해를 미리 방지하기 위한 소통과정의 중요한 정보가 될 것이기 때문이다.

† 연락저자 : 임현철 교수, 61186 광주광역시 북구 용봉로 77 전남대학교 수학과, Tel : 062-530-3347, E-mail : limhc@chonnam.ac.kr
2024년 8월 2일 접수; 2024년 11월 4일 게재 확정.

본 연구는 전환사채의 평가에 실무적으로 많이 적용되는 Goldman - Sachs(이하 GS모형)(Derman, 1994) 및 Tsiveriotis - Fernandes(이하 TF모형)(Tsiveriotis and Fernandes, 1998)의 모형을 바탕으로 하여 전환사채의 주요한 조건부 청구권인 전환권, 발행자의 콜옵션, 보유자의 풋옵션과 부가적인 조건인 전환가격 재조정 조건이 존재하는 경우의 평가 방법을 설명하고 전환가격 재조정 조건에 관한 새로운 수치적 평가 방법을 제시한다. 특히 전환사채의 평가에 주로 사용되는 이항트리 및 유한차분 방법에서 전환가격 재조정 조건과 발행자의 콜옵션이 동시에 존재하는 경우에도 적용가능한 수치적 평가 알고리즘은 이 논문에서 처음 제시하며 여기에 이 논문의 차별점이 있다. 전환사채는 발행자의 콜옵션과 전환권의 상호작용이 상품의 가격과 조기상환을 유도하는 중요한 요인이 된다. 이 경우에도 재조정된 전환가격을 기준으로 콜옵션을 위한 행사가격이 결정되므로 재조정 조건하에서 주요한 두 프로비전의 움직임을 이해하는 것이 실무적으로 중요하다.

## 2. 선행 연구

전환사채는 고정적인 현금흐름을 지급하는 사채에 더하여 전환권과 콜옵션, 풋옵션을 내재시킨 상품이다. 전환권과 콜옵션이 전환사채 가격에 미치는 영향을 분석한 초기의 연구는 Ingersoll(1977), Brennan and Schwartz(1977) 등이 있다. 해당 연구들은 블랙-숄즈-머튼 모형을 기초로 전환사채가 갖는 전환가격, 콜옵션의 유무에 따른 최적행사 조건과 가격의 유효한 범위를 연구하고 일반사채 혹은 프로비전이 없는 경우와 비교하였다.

전환사채가 채권과 지분상품의 요소로 구성된 복합금융상품이라는 측면에서 진행된 연구들은 Olsen *et al.*(2002)에 잘 정리되어 있다. Olsen *et al.*(2002)은 부채요소와 지분요소에 서로 다른 할인율을 적용하여 평가하는 모형들을 '혼합된 할인모형'(Blended Discount Model)으로 구분하였으며 혼합된 할인모형 내에서 GS모형은 Probability of conversion-weighted discounting, TF모형은 Equity and bond cash flow-weighted discounting에 해당한다. 이들 연구는 전환사채의 공정가치평가 실무에 현재까지 중요하게 적용되고 있다.

전환가격 재조정 조건을 고려한 기존 연구로는 Kimura and Shinohara(2006)의 연구가 있으나 이는 전환권과 전환가격 재조정 옵션만 고려하고 있으며 콜옵션 및 풋옵션은 반영하지 않는다. 그러나 이는 국내에서 발행되는 많은 전환사채가 발행자의 콜옵션을 포함하여 발행된다는 측면에서 일반적으로 적용되기 힘들다. 이에 따라 본 연구는 전환권과 전환가격 재조정 조건, 발행자의 콜옵션을 모두 포함한 전환사채의 평가 방법을 제시한다.

전환가격 재조정 조건은 기초자산인 주가에 대한 경로의존성(Path dependency)을 지니고 있으며 사전 약정된 조건이 발동되면 전환가격이 바뀌어 상품의 구조에 영향을 미친다. 본 연구는 이러한 재조정 조건을 가진 전환사채를 평가하기 위한 조건부 가격 함수(Conditional price function)와 점프 조건(Jump condition)에 의한 업데이트 방법(Updating rule)을 제시하였으며 유한차분법(Finite Difference Method)을 적용하여 전환권과 발행자의 콜옵션, 전환가격 재조정 조건을 모두 지닌 전환사채의 가치평가 결과를 실증 테스트에서 보인다.

## 3. 전환사채 평가모형

### 3.1 혼합된 할인 모형: Blended Discount Model

채권과 지분상품의 요소를 모두 포함하는 복합금융상품의 특성은 전환사채 가치평가의 주요 이슈이다. 전환사채 발행을 위해 협의된 조건들이 전환사채의 채권과 지분 상품적인 측면 각각 또는 모두에 영향을 미칠 수 있기 때문이다. 이런 이유에서 많은 전환사채 평가 모형이 부채요소와 지분요소를 구분하여 평가하고 있으며 Olsen *et al.*(2002)은 채권과 지분상품 각 요소에 서로 다른 할인율을 적용하여 평가하는 모형들을 아울러 '혼합된 할인모형(Blended Discount Model)'이라는 카테고리로 구분하고 있다.

본 연구는 혼합된 할인모형인 Probability of conversion-weighted discounting(GS모형)과 Equity and bond cash flow-weighted discounting(TF모형)을 기반으로 두는 수치적 평가 방법이므로 해당 모형들의 주요한 내용을 기술한다. 해당 모형들에 의한 평가에 있어 기초자산인 주식 가격은 잘 알려진 블랙-숄즈 모형을 따름을 가정한다.

$$\frac{dS}{S} = r_g dt + \sigma dW \tag{1}$$

여기서 $r_g = r - dv$로 주가의 무위험 증분율을 나타내며 $r$는 무위험 이자율, $dv$는 배당수익률이다. $\sigma$는 주가의 변동성이며 $W = W(t)$는 위험중립 측도를 갖는 위너 확률과정이다. 실무적으로 $r$과 $dv$를 시간에 의존하는 함수로 바꾸어 이자율의 기간구조를 반영할 수 있는 확장된 블랙-숄즈 모형을 적용할 수 있으나 논의의 편의를 위하여 수평의 이자율 기간구조를 가정한다.

### 3.2 GS모형

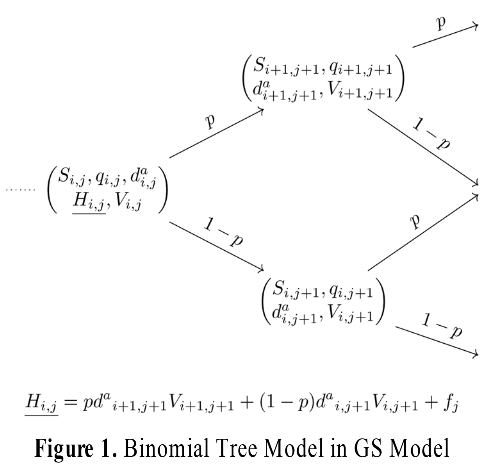
Goldman Sachs의 Emanuel Derman 등에 의하여 1994년 제시된 모형이며 실무적인 평가 방법을 자세히 기술하고 있다. 주가의 이항모형을 바탕으로 각 노드에서 전환확률과 신용조정 할인율을 생성하며 이전 노드와 가치 비교를 통하여 전환권과 발행자의 콜옵션 및 보유자의 풋옵션을 유연하게 고려할 수 있는 장점이 있다. 전환사채는 위험채권의 속성을 내포하고

있다. 그러므로 무위험 할인율을 적용하는 주식 파생상품의 평가와 달리 적용되는 할인율은 시간에 의존적일 뿐만 아니라 주가에 따른 차이도 갖는다. 혼합된 할인모형은 이를 반영하여 시간과 주가의 레벨에 따라 할인율을 차등하여 적용하는 모형이다. GS 및 TF모형은 주식으로 전환되는 경우 할인에 적용되는 이자율에 무위험 이자율 $r$을 가정한다. 그러나 전환이 되지 않는 영역은 주식과 위험채권의 두 가지 요소를 동시에 지니고 있으므로 무위험 이자율만으로 전환사채를 할인하는 것은 적절하지 못하다. 예를 들어 주가가 극단적으로 낮은 심외가격(Deep out of the money)이라면 전환되지 않을 것이 확실하므로 발행자의 신용스프레드 $r_c$를 포함한 위험이자율 $r+r_c$로 할인하는 것이 적절하다. 주가가 양극단에 속하지 않는 경우 두 가지 상태가 중첩되어있다고 볼 수 있다. GS모형은 이런 경우 무위험 이자율과 위험이자율 사이의 조정된 이자율을 통하여 할인하는 방식을 취하며 이를 신용조정할인율(Credit-Adjusted Discount Rate)이라 정의한다. 전환확률 $q$가 주어진 노드에서 주식으로의 전환이 일어날 확률이라고 한다면 $1-q$는 채권으로 유지될 확률을 의미한다. 이 경우 $d^r$을 무위험할인율, $d^c$를 위험할인율이라 할 때 신용조정할인율 $d^a$은 $qd^r+(1-q)d^c$ 과 같이 가중평균을 통해 계산된다.

전환이 발생하는 경우는 전환확률 $q=1$이 된다. 조기상환의 경우는 매수자의 풋옵션 행사와 발행자의 콜옵션 행사가 있다. 풋옵션 행사의 경우는 일반적으로 채권의 신용리스크의 확대에 의해서 조기상환이 이루어지며 노드의 전환확률 $q$는 0이다. 콜옵션의 행사의 경우 GS모형의 원 논문에서 전환확률 $q$를 0으로 판단하여 신용조정할인율을 적용한다.

GS모형은 Cox *et al.*(1979)에서 제시한 방식에 따라 주가의 미래 움직임을 이항트리로 생성한다. 배당율을 차감한 증분율 $r_g$, 변동성 $\sigma$는 상수로 가정할 경우 이항트리의 산식은 아래와 같다.

$$S_{i,j}=Su^i d^{j-i+1},\ d=1/u,\ u=\exp(\sigma\sqrt{\Delta t}),$$
$$p=(e^{r_g\Delta t}-d)/(u-d).$$



$$\underline{H_{i,j}}=pd^a{}_{i+1,j+1}V_{i+1,j+1}+(1-p)d^a{}_{i,j+1}V_{i,j+1}+f_j$$

**Figure 1.** Binomial Tree Model in GS Model

전환사채의 평가를 위하여 트리의 각 노드$(i,j)$에 주가 $S_{i,j}$, 옵션의 가치 $V_{i,j}$ 이외에 전환확률 $q_{i,j}$과 신용조정할인율 $d^{a_{i,j}}$이 추가된다. 특히 주목할 점은 이들은 주가의 상승, 하락 확률과 달리 엣지에 부속된 속성이 아닌 '노드의 속성'이다. 이는 신용조정할인율이 상태가격임을 의미한다. 주가의 가격트리가 생성되면 이를 기초로 전환사채의 가격트리를 부록 A의 백-워드 과정에 따라 구성할 수 있다. <Figure 1>에서 $V$는 전환사채의 가격, $H$는 보유가치, $f_j$는 쿠폰 등의 $t_j$시점 채권의 현금흐름을 의미한다.

$BC$가 콜옵션의 행사가격이고 $BP$가 풋옵션의 행사가격인 경우 발행자는 $BC$가 전환사채의 보유가치 $H$보다 작을 경우 콜옵션을 행사한다. 그러나 콜옵션이 행사된 상태에서도 투자자는 여전히 풋옵션과 주식전환을 선택할 수 있으므로 전환사채의 가치 $V$는 전환가치 $P=\alpha S$, 풋옵션가치 $BP$, $\min[H, BC]$ 중 큰 금액으로 정해진다(Derman, 1994; Tsiveriotis and Fernandes, 1998). 여기서 $P$는 패리티(Parity), $\alpha$는 전환비율을 의미한다. 결과적으로 전환사채의 가치 $V$의 식은 아래와 같다.

$$V=\max[P, BP, \min(H,BC)] \qquad (2)$$

### 3.3 TF모형

이 모형은 Morgan Stanley의 Kostas Tsiveriotis와 Chris Fernandes가 "Journal of Fixed Income"에 발표한 모형(Tsiveriotis and Fernandes, 1998)이다. 전환사채를 지분(equity)과 이자율에 기초한 파생상품으로 보고 지분가치와 채권가치를 구분하여 전환사채의 가치를 평가하며 이항트리를 사용하는 GS모형과 다르게 TF모형은 유한차분 방법을 사용한다.

전환사채를 지분증권(equity)을 기초자산으로 하는 조건부 청구권이라고 한다면 블랙-숄즈 방정식에 따라 다음과 같이 전환사채의 가치 $V$와 순수채권가치 $U$를 주가와 시간의 함수로 표현할 수 있다.

$$COCB: \frac{\partial U}{\partial t}+\frac{\sigma^2 S^2}{2}\frac{\partial^2 U}{\partial S^2}+r_g S\frac{\partial U}{\partial S} \qquad (3)$$
$$-(r+r_c)U+f(t)=0$$

$$CB: \frac{\partial V}{\partial t}+\frac{\sigma^2 S^2}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}+r_g S\frac{\partial V}{\partial S} \qquad (4)$$
$$-r(V-U)-(r+r_c)U+f(t)=0$$

여기서 $r_g$는 주가의 위험중립 증분율, $r$은 무위험 이자율, $r_c$는 발행자의 신용스프레드, $f(t)=\Sigma_j f_j\,\delta(t-t_j)$, $f_j$는 $t_j$시점 채권의 현금흐름으로 $t_j\in$cash-times일 경우 $f_j>0$이고 그렇지 않을 경우 $f_j=0$이다. $\delta(t-t_j)$는 Dirac의 델타함수이다. 따라서 유한차분식에서 $\frac{1}{\Delta t}$의 역할을 한다.

식 $U$로 표현한 순수채권가치(이하 COCB: Cash Only part of the CB)는 TF모형에서 설정된 가상의 파생증권이다. COCB의 보유자는 전환사채에서 발생하는 모든 현금흐름에 대한 권리를 갖지만 합리적인 의사결정하에서 전환된 지분증권에 대한 권리는 보유하지 못하게 된다. 위 수식의 정의에 따라 COCB의 가격 $U$는 CB의 가격 $V$에 영향을 준다. COCB는 CB와 동일한 기초자산 S를 갖는 파생상품이므로 COCB의 가격 $U$는 CB의 가격 $V$와 마찬가지로 블랙-숄즈 타입의 편미분 방정식을 따르게 된다. 특히 COCB는 전환영역이 아닌 경우의 CB 발행자의 신용위험이 반영된 사채의 현금흐름 부분만을 표현하므로 COCB의 편미분 방정식은 $V$에 의하여 결정되는 전환경계를 벗어나면 0이 되며 그렇지 않은 영역은 위험이자율 $r+r_c$을 사용하여 발행자의 신용스프레드를 반영하고 있다. 전환사채의 전체가격 $V$에서 COCB의 가격 $U$만큼을 제외한 $V-U$부분은 지분증권에 속하므로 무위험 이자율 $r$로 할인되며 $U$부분은 위험이자율$r+r_c$로 할인된다. 이런 방식으로 $U, V$에 관한 두 편미분 방정식 (3), (4)은 매 시점 서로 영향을 주면서 자유경계(Free boundary)(Wilmott, 2007)를 내재적으로 생성한다 (부록 A.1 $V$의 계산과정 참조). 즉 CB의 식 (4)는 내재된 조건에 따라 콜옵션, 풋옵션, 전환권이 아메리칸 옵션의 형태로 행사되는 경계를 정하게 되며 동시에 COCB의 가치는 이 경계를 벗어나면 0이 된다. 만기 시점 $T$ 에서 COCB의 가치 $U$ 와 CB의 가치 $V$에 채권의 마지막 현금흐름 $B(T)$를 설정한 후 $T=t_m$시점에서 $t_0$까지 시간스텝 $[t_j, t_{j+1}]$, $j=m-1,\cdots,0$별로 유한차분법을 사용하여 순수채권부분인 COCB의 식 (3)을 푼다. 구하여진 해를 CB의 식 (4)에 대입하고 시점의 현금흐름이 더해진 보유시의 가치 $H$를 구하고 이를 콜, 풋 그리고 전환조건과 비교하여 내재적으로 경계(자유경계: free boundary)가 매 시점 계산된다. 유한차분 방식은 이항트리 방법과 달리 직관적이지는 않으나 정밀도가 뛰어나며 전체 주가의 영역에서 해가 산출되므로 주가의 움직임에 따른 가격의 변화를 한 번에 파악할 수 있는 장점이 있다. 구체적인 수치화 과정은 논문 Tsiveriotis and Fernandes(1998) 또는 부록의 A.1을 참조하기 바란다.

## 4. 전환가격 재조정 조건(Refixing Condition)

이제 이 연구의 주제인 전환가격 재조정 조건을 혼합된 할인모형 특히 TF모형에 기반하여 설명할 준비가 되었다. 전환가격 재조정 조건은 주가가 현재의 전환가격보다 낮아지는 경우 낮은 주가로 전환가격을 재조정해주는 옵션이다. 현재 국내에서 발행되는 상당수의 전환사채는 전환가격 재조정 조건을 옵션으로 포함하고 있다. 가치평가의 입장에서 해당 옵션은 만기 시점에서의 자산 가치뿐만 아니라 기초자산이 이동한 경로에 따라 옵션의 수익이 달라지는 형태이므로 경로의존형 옵션에 해당한다. 경로의존형 옵션은 약한 경로의존형과 강한 경로 의존형의 두 가지 타입이 있다. 강한 경로의존형은 평가에 필요한 경로의 이력을 갖는 경로의존변수 $I(S,t)$가 파생상품 가격평가를 위하여 반드시 필요한 경우를 의미한다. 반면 베리어 옵션과 같이 한 번의 트리거만으로 수익구조가 결정되는 경우, 평가를 위하여 이러한 변수가 필요 없는 약한 경로 의존형이다. 강한 경로의존형 상품의 평가는 몬테카를로 방식을 주로 이용한다. 몬테카를로 방식에서 각 주가의 경로는 독립적이며 전환가격 재조정에 관한 정보를 확정된 모든 주가의 움직임에서 알 수 있기 때문이다.

미국식 옵션 구조를 갖는 경우에 몬테카를로 방식으로 평가하는 대표적인 방법은 Longstaff and Schwartz(2001)에 의한 회귀분석적 방법(LSMC)이다. 그러나 전환사채는 특히 한 시점에 미국식 옵션 형태인 콜, 풋, 전환권과 전환가격 재조정 조건이 중첩된 경우가 상존한다. 전환가격 재조정 조건이 있는 경우 주가의 포워드 과정에서 트리거되는 전환가격에 따라 전환사채의 구조가 바뀌는 상태 시나리오가 생기며 여러 번의 재조정 조건시 이들이 중첩되는 상태들이 증가한다. 이런 경우 단일한 전환가격 즉 하나의 상태를 가정하여 백-워드 알고리즘을 적용하는 기존의 LSMC방법을 적용할 수 없다.

발행자의 콜옵션 없이 전환권과 전환가격 재조정 조건만 존재하는 경우 이를 근사하는 방법(Kimura and Shinohara, 2006)이 소개되었다. 해당 논문은 LSMC 방법 대신 Grant *et al.*(1996)(GVW 방법)에 제시된 최적행사가격(조기행사경계)을 찾는 방식을 사용한다. 그러나 전환권 행사가 가능한 주가의 하한값을 찾는 GVW 방법은 전환권의 가치를 과소평가하는 준-최적화 문제(sub-optimality)를 갖고 있음이 알려져 있다(Broadie and Glasserman, 1997). 따라서 전환권, 발행자의 콜옵션 및 보유자의 풋옵션 그리고 전환가격 재조정 조건이 동시에 존재하는 전환사채의 평가는 상기한 이유로 몬테카를로 방법보다 유한차분을 이용한 수치적 방법이 더 유용하다. 후술한 5장 실증 테스트에서 발행자의 콜옵션이 전환가격 재조정 옵션의 평가가격에 큰 영향을 미친다는 점을 실증하였다. 이는 전환가격 재조정 조건만을 포함한 경우와 달리 콜옵션 및 풋옵션과 같은 여러 프로비젼이 포함된 전환사채의 평가는 이들 조건들간의 상호작용을 고려해야 함을 의미한다.

### 4.1 강한 경로의존형 파생상품의 평가

파생상품의 평가에서 이러한 강한 경로 의존을 갖는 옵션을 룩백(Look-back)형태의 옵션이라 한다. 이 조건은 상품의 수익구조(Payoff)에 영향을 주거나 상품의 약관에 명시된 부속된 조항을 재설정한다. 전환사채의 전환가격 재조정 조건은 후자에 해당하며 기초자산이 미리 설정된 가격을 트리거시 이 가격이 새로운 전환가격으로 재설정된다. 가능한 시점과 재조정 가격이 여럿 있는 경우 또한 마찬가지 방식으로 전환가격을 재설정한다. 경로의존변수 $I(S,t)$는 아래에 기술한 특징을 갖는다.

1) 기초자산의 이력과 시점의 함수(또는 작용)로 표현: $I(S,t) = F(S_{(0,t]}, t)$
2) 파생상품의 만기수익구조에 직접 적용되는 경우: $V(S,T,I) = \mathrm{Payoff}(S,I)$
3) 상품에 부속된 조항(예: 전환가격)이 바뀌는 경우: 전환사채의 재조정 조건
4) $I(S,t)$는 기초자산(주가)와 달리 그 자체로는 확산이 없다. 즉 2계 미분 $\frac{\partial^2 V}{\partial I^2} = 0$이다.
5) $I(S,t)$의 1계 미분 $dI$는 경로를 관측하여야 하는 시점을 제외하면 0이다. Wilmott(2007) Vol 2, Ch 24에 의하면 실무적이고 또는 법적인 이유로 경로의존변수 $I(S,t)$는 연속변수가 될 수 없음을 설명한다. 따라서 식 (5)는 경로변수와 관측시간이 유한개로 이산화된 연립편미분 방정식계가 된다.

전환사채의 경우에는 전환가격 재조정 시점 $t_j \in$ refix-times를 제외한 모든 시점 $t$에서 $dI = 0$이다. 1)에서 $F(S_{(0,t]}, t) = \int_0^t f(S,u)du$로 표현이 가능한 함수 $f(S,u), 0 < u \le t$가 명시적일 경우는 경로관측시점 $t$에서 $dI = f(S,t)dt$이다. 그러나 3)의 경우 상품의 부가조건을 변경시키는 일종의 작용으로 간주되며 이를 $dI = Adt$로 표현하자. 즉 $A(S,t)$는 경로관측시점 $t$에 발동하는 액션이다. 파생상품 $V$의 미분식 $dV = \frac{\partial V}{\partial t}dt + \frac{\partial V}{\partial S}dS + \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\sigma^2 S^2 dt + A\frac{\partial V}{\partial I}dt$을 $rVdt$ 또는 혼합된 할인모형의 경우 경계에서 $rVdt$ 및 $(r+r_c)Vdt$를 모형에 준하여 일치시켜서 유도되는 식은 시간 $t$와 2개의 공간변수 $S, I$에 관한 퇴화된($\frac{\partial^2 V}{\partial I^2} = 0$) 2계 포물형 편미분 방정식이다. 중첩된 할인을 고려하지 않은 룩백조건을 갖는 옵션 $V = V(S,t,I)$의 편미분 방정식은 아래 식과 같다.

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\sigma^2 S^2}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + r_g S\frac{\partial V}{\partial S} + A\frac{\partial V}{\partial I} - rV = 0 \qquad (5)$$

식에서 경로의존변수 $I = I(S,t)$는 $V$에 대하여 2계 미분인 확산항이 없이 1계 미분항 $A\frac{\partial V}{\partial I}$만 존재한다. 이는 $I$가 주가 $S$에 종속되어 있으며 $S$가 움직이는 각 경로에 가능한 값의 이력 $I(S,t)$이 1차원적으로 나열됨을 의미한다. 경로변수 $I$가 연속함수일 경우 추가된 대류항(convection term) $A\frac{\partial V}{\partial I}$이 매 시점 존재하게 된다. 이에 필요한 수치계산의 정밀도를 높이기 위하여 유한체적법(finite volume method)을 사용할 수 있다. 그러나 언급하였듯이 관측시간의 간격이 크며 전환 가능한 가격들이 유한개이므로 경로변수 $I$를 상태를 반영할 정도의 유한개($k$)로 한정한다. 주가의 확률미분방정식(식 (1))을 수치화하는 $k$개의 이항/삼항트리 또는 유한차분 그리드를 준비하고 각각의 그리드에서 독립적으로 파생상품 가격들 $V_1, \cdots, V_k$의 백-워드 과정을 진행한다. 경로관측 시점 $t_j$에 도달한 경우 $V$들을 대상으로 액션 $A$에 의한 갱신(Updating rule)을 적용하는 작업(식 (6))을 한다. 경로의존형 파생상품의 평가와 업데이트 방법은 Wilmott(2007), Vol 2, Ch 26 floating strike lookback swap의 예제에 자세히 기술되어 있다. 관련된 논문으로는 Kjaer(2004)와 Luo and Shevchenko(2013)을 참조할 수 있다.

<Figure 2>는 전환가격 재조정 조건에 의하여 변수 $I$가 파생상품의 식에 추가되어 가격함수 $V$의 차원이 늘어남을 보여준다. $k$-개의 가격함수 $V_l, l = 1, \cdots, k$는 $V_1$을 기준으로 순차적으로 $V_{l+1}$의 영역 $S \le C_l$을 $V_l$의 값으로 교체한다. 이를 위해 유한개로 한정한 경로의존변수 $I_l, l \in \{1, \cdots, k\}$가 갖는 값의 개수만큼 존재하는 $k$개의 유한차분을 위한 그리드들이 필요하다. 각 그리드마다 가격함수 $V_l, l = 1, \cdots, k$를 가정하자. $l$번 그리드는 평가시점의 경로변수 $I$의 값이 $l$번 그리드의 전환가격 $C_l$임을 가정한 조건부 상품을 평가하는 유한차분 그리드가 된다.

Feynman-Kac formula(Björk, 2009)를 적용하면 가격함수 $V(S,t,I)$의 편미분 방정식의 해는 전환가격 $C_l$를 평가시점의 조건부로 갖는 가격함수 $V(S,t|C_l)$로도 표현할 수 있다.

$$V(S,t,C_l) = V(S,t \mid C_l) = \mathrm{E}[V(S(T),T,I) \mid I(S,t) = I_l]$$

위 식은 평균 연산자를 사용하여 간단히 표현된 식이지만 경로적분으로 표현하면, 주가, 시간, 경로변수 모두에 대한 적분이 또한 각 시점에 상품이 갖는 조건을 반영하여 중첩된 형태로 나타난다. 이는 $V(S,t,C_l)$가 조건부 가격이 되는 이유이기도 하다.

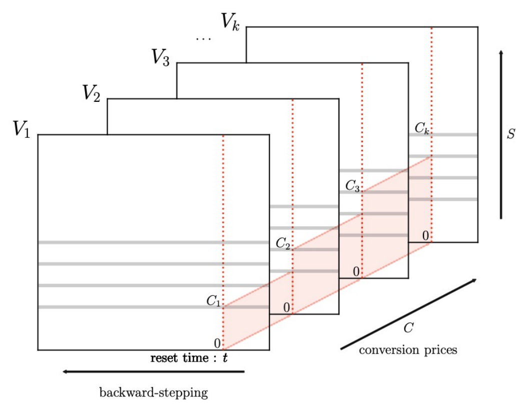



**Figure 2.** Pricing Convertible Bond with Refixing Clauses

### 4.2 조건부 가격함수의 연립 편미분방정식과 Updating rule

전환가격 재조정 조건을 트리거하면 전환가격이 바뀌게 된다. 이후에도 주가가 하락할 경우 전환가격 재조정 조건에 부합

하면 더 낮은 레벨로 바뀔 수 있다. 따라서 현재 전환가격 $C_k$를 기준으로 가능한 미래의 전환가격이 $\{C_1,\cdots,C_k\}$ 될 가능성을 모두 고려한다. 상품의 약관에 명시된 가능한 전환가격을 크기 순서로 나열한 리스트를 $L=\{C_1,\cdots,C_L\}$ 이라 하자. 변경될 수 있는 전환가격 $C_l,\ l=1,\cdots,L$를 조건으로 갖는 $L$개의 서로 다른 전환사채가 존재한다. 현재의 전환가격이 $C_k$인 전환사채의 조건부 가격을 $V=V(S,t,C_k)$ 라 정의하자. 전환가격 재조정 조건의 적용은 만기시점 $t_n$에서 시간을 거슬러 백-워드 과정 진행 중 전환가격 재조정이 가능한 시점이면서 주가 $S$가 전환이 가능한 구간 $(0,C_1],(C_1,C_2],\cdots,(C_{k-2},C_{k-1}]$에 해당될 경우 $l=1,\cdots,k-1$ 순서대로 $S\le C_l$에 속하는 $V(S,t,C_l)$의 값으로 $V(S,t,C_{l+1})$을 업데이트함을 의미한다. TF모형에 대하여 예를 들면, COCB와 CB의 가격함수 $U,V$ 모두에 대하여 $t>0$일 때 아래의 연립 편미분 방정식과 이들의 연이은 교체과정으로 이를 표현할 수 있다. 여기서 $U,V$에 적용하는 작용소 $L_1,L_2$는 각각 식 (3), (4)를 의미하고 $t^-$는 평가 시점 $t$직전, $t^+$는 직후를 의미한다.

1) 각 전환가격에서의 CB와 COCB의 연립 편미분방정식

$$\begin{aligned} &L_1U(S,t,C_k)=0\ , &&L_2V(S,t,C_k)=0\\ &L_1U(S,t,C_{k-1})=0, &&L_2V(S,t,C_{k-1})=0\\ &&\vdots&\\ &L_1U(S,t,C_1)=0, &&L_2V(S,t,C_1)=0 \end{aligned}$$

2) 연립 편미분방정식의 연속적인 교체과정(Updating rule)

$$\begin{aligned} &U,V(S,t^-,C_2)=U,V(S,t^+,C_1), \quad 0<S\le C_1\\ &U,V(S,t^-,C_3)=U,V(S,t^+,C_2), \quad S\le C_2\\ &\qquad\vdots\\ &U,V(S,t^-,C_k)=U,V(S,t^+,C_{k-1}), \quad S\le C_{k-1} \end{aligned}$$

위의 전개방법은 전환가격 $C_l,\ l=1,\cdots,k$을 상품가격 $V$의 새로운 변수인 경로의존변수 $I=I(S,t)$를 정의하여 일반화시킬 수 있다. 이제 $V=V(S,t,I)$이며 전환가격 재조정 시점 $t_j$를 제외한 모든 $t\le T$(만기)에서 $dI=0$이다. $t_j$시점의 좌, 우극한에서 다음과 같은 점프 조건(Jump condition)이 성립하므로 Updating rule을 통해 전환사채의 가격을 갱신하더라도 경로에서 파생상품 공정가치의 연속성은 유지된다.

$$V(S,t_j^-,I_{l-1})=V(S,t_j^+,I_l),\ \text{if } S<C_{l-1},\ l=1,\cdots,k \quad (6)$$
$$I_l(S,t)=I(S,t),\ s.t\ S\in(C_{l-1},C_l],\ t\in \text{refix-times}$$

## 5. 실증 테스트

이번 장은 2020-6-17일 발행된 "현대로템(주) 제30회 무기명식 이권부 무보증 전환사채"를 앞서 기술한 평가 수치모델의 적용 예시로서 살펴본다. TF모형을 바탕으로 전환가격 재조정 조건의 유무와 콜옵션 조건의 유무에 따라 기초자산인 주가의 레벨에 따른 전환사채의 가격을 비교한다.

실증연구의 대상인 "현대로템(주) 제30회 무기명식 이권부 무보증 전환사채"는 풋옵션이 존재하지 않는다. 그러나 이 조건은 실제 발행되는 전환사채의 목적상 중요성이 크지 않으므로 고려하지 않았다. 해당 전환사채는 발행자의 콜옵션 행사에 따라 매입자들의 전환유도가 자연스럽게 이루어져 성공적으로 주식전환을 이루어 내었으므로 발행자의 콜옵션 행사가 전환가격 재조정 조건에 미치는 영향을 보여주기 좋은 실증연구의 대상이라 사료된다.

- 현대로템이 발행한 전환사채의 액면가액은 2,400억 KRW 이고 만기보장수익률 3.70%을 가산한 만기상환율은 108.5250%이며 전환비율은 100%이다. 전환청구기간은 2020-7-17부터 2023-5-17까지다.
- 주식 시가 하락에 의한 전환가액 조정의 경우 사채 발행일로부터 3개월 후부터 매 3개월마다 전환가액을 조정하되, 해당 "전환가액 조정일 전일"을 기준으로 보통주의 1개월 "가중산술평균주가", 1주일 "가중산술평균주가" 및 최근일 "가중산술평균주가"를 산술평균한 가액과 최근일 "가중산술평균주가" 중 낮은 가격이 직전 "전환가액"보다 낮은 경우, 그 낮은 가격으로 "전환가액"을 조정한다. 다만 전환가액의 최저 조정한도는 발행 시 전환가액의 80%의 금액이다.
- 발행자의 콜옵션은 발행금액의 전액에 대하여 발행일로부터 1개월 후인 2020년 07월 17일로부터 만기 1개월의 전일인 2023년 05월 17일까지 행사할 수 있다. 행사를 위해서는 위 기간 내에 연속 15거래일간 발행자의 보통주 종가가 전환가액의 140%를 초과하는 조건이 필요하다. 발행자는 조건이 만족되는 날의 다음 날로부터 2주 후에 콜옵션을 행사할 수 있다. 특히 현대로템의 전환사채 계약은 전환청구권이 콜옵션 행사에 우선하도록 구성되어있어 채권보유자의 강제전환을 유도한다. 전환을 하지 않은 보유자에게는 3.70%의 이율을 적용한 이자를 일할 계산하여 상환한다. 보유자의 풋옵션은 없다.

평가에 적용한 파라미터는 다음과 같다. 평가일은 2020-6-17,

**Table 1.** Hyundai-Rotem Co. 2020.06.05. Main Contents of the Decision to Issue Convertible Bonds

| Name | Issue date | Maturity date | Coupon rate | Yield to maturity | Conversion price | Credit ratings |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Hyundai-Rotem Company | 2020-6-17 | 2023-6-17 | 1% | 8.5250% | 9750 KRW | BBB+ |

평가일 주가는 14250 KRW, 현재 전환가격은 9750 KRW, 재조정에 의한 전환가격 하한은 원래의 전환가격의 80%인 7800 KRW이다. 연속복리 제로금리기준 무위험 이자율은 1%, 위험이자율은 5%로 가정한 순수채권가치는 9596 KRW, 주가의 변동성은 50%로 가정하였으며 유한차분 그리드의 시간 간격은 1일, 주가 간격은 1% 단위, 그리드의 윗쪽 상한선은 발행시 주가의 4배로 하였고 발행자의 콜옵션 행사를 위해 기간 내에 연속 15거래일간 발행자의 보통주 종가가 전환가액의 140%를 초과해야 한다는 조건은 평가모형에 포함하지 않았다.

해당 파라미터의 경우 이자율은 NICE Pricing & Information Inc.의 2020년 6월 17일의 YTM Matrix를 참고하였으며, 변동성은 2020년 6월 17일부터 2023년 6월 8일까지의 현대로템 주식회사의 주가의 종가를 바탕으로 추출하였다.

주요한 테스트와 이에 의한 결과는 다음과 같다.

1) 주가에 따른 TF모형에서의 전환사채 가격변화 그래프에서 전환사채 가격들이 각각의 가능한 전환가격에 따라 단계적으로 변화하는 모습을 통해 전환가격 재조정 조건이 전환사채의 가격에 미치는 영향을 보인다.
2) 발행자의 콜옵션과 전환권, 전환가격 재조정 조건이 동시에 있을 때 콜옵션 행사가격 이상에서 전환가격 재조정 조건의 프리미엄이 소멸하는 과정을 보인다.

### 5.1 전환가격 재조정 조건과 콜옵션 유무에 따른 전환사채의 공정가치 비교

<Figure 3>은 TF모형에 대하여 콜옵션의 유무, 전환가격 재조정 조건의 유무에 따른 전환사채의 가격 변화를 세로축, 주가를 가로축으로 둔 그래프이다. 왼쪽 그래프는 콜옵션 조건이 있을 때의 전환사채 가격의 그래프이며 오른쪽은 발행자의 콜옵션이 없음을 가정한 그래프이다. 검은 점선 refixing-floor는 전환가격 재조정 조건의 전환가격 하한인 7800 KRW을 가정했을 때의 전환사채 가격 그래프이며 이후 Updating rule을 통해 낮은 전환가격(그림의 라벨: refixing-floor)에서부터 차례로 영향을 주어 최종적으로 현재 전환가격 그래프(그림의 라벨: refixing-current, 검은 실선)를 생성한다. 상세히 설명하면, <Figure 3>은 평가일인 2020년 6월 17일에 전환가격의 하한인 7800 KRW를 기준으로 한 주가별 전환사채 그래프(그림의 라벨: refixing-floor)를 시작으로 Updating rule을 통해 현재의 전환가격 9750 KRW의 주가별 전환사채 그래프를 완성한다. 4장에서의 설명에 따라 현재의 전환가격 $C_k$는 9750 KRW이며 $C_1$은 하한인 7800 KRW이 된다. 이제 현재 전환가격 $C_k$를 기준으로 가능한 미래의 전환가격 리스트$\{C_1,\cdots,C_k\}$에 따라 각 전환가격 별로 CB와 COCB의 연립 편미분방정식 $V$와 $U$를 구성한다. 이후 $l=1,\cdots,k-1$ 순서대로 $S\le C_l$에 속하는 $U,V(S,t,C_l)$의 값으로 $U,V(S,t,C_{l+1})$을 갱신하며 Updating rule을 통해 최종적으로 $U,V(S,t,C_k)$의 가격 그래프를 만들어 낸다. 이 과정이 그림의 선 refixing-floor와 refixing-current 사이의 옅은 선들로 표시되고 있다. 평가 모델에서 가능한 전환가격$\{C_1,\cdots,C_k\}$의 간격은 하한이 20%이므로 설명의 편의상 1%인 97.5 KRW로 하였으며 이 경우 가능한 전환가격의 리스트는 {7800, 7897.5, 7995, ⋯ , 9,652.5, 9750 }가 된다. 이후 다음 평가일이 되면 전환가격 재조정 조건에 따라 전환가격은 상승 혹은 하락할 수 있다. 다음 평가일에 전환가격이 상승/하락하는 경우에도 그 상승/하락한 전환가격을 기준으로 다시 위의 과정을 통해 재조정 조건과 발행자의 콜옵션을 가진 전환사채의 재평가일 공정가치를 구할 수 있다.

전환가격 재조정 조건이 없는 가격(그림의 라벨: no-refixing, 빨간 점선) 대비 차이는 전환가격 재조정 조건의 가치를 의미한다. 평가시점 주가 14250을 기준으로 왼쪽 그래프의 14634는 전환가격 재조정이 있는 전환사채의 가격이며 14630은 전환가격 재조정 조건을 삭제한 가격이다. 오른쪽 그래프의 16682는 전환가격 재조정이 있는 가격이며 16164는 전환가격 재조정 조건을 삭제한 가격이다. 이 그래프를 통해 전환가격 재조정 조건의 가치가 발행자의 콜옵션 유무에 따라 큰 차이

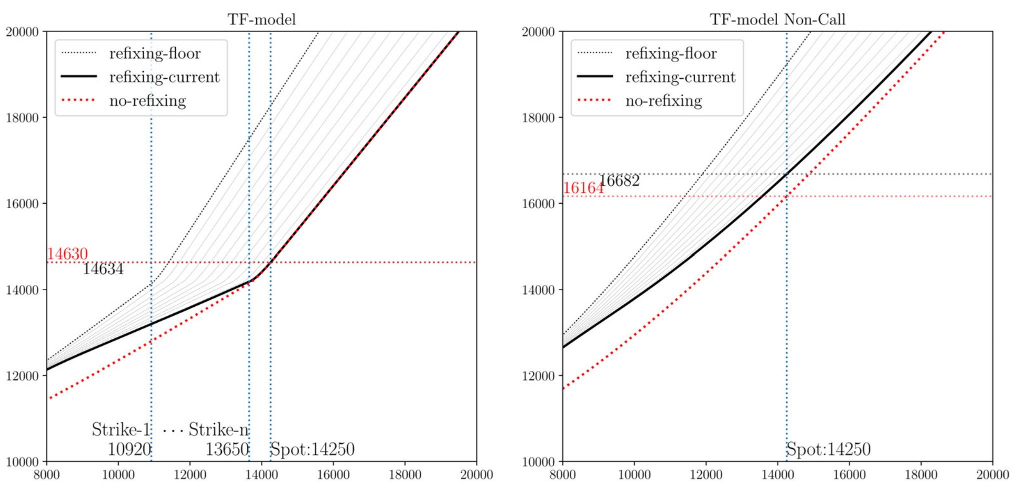



**Figure 3.** Pricing Graph for Convertible Bond in TF Model

를 보이며 전환사채의 평가에 있어 각 조건의 상호작용을 고려해야 함을 알 수 있다.

콜옵션이 존재할 경우를 의미하는 왼쪽 그래프에서 Strike-1, …, Strike-n으로 표시한 부분은 발행자의 콜옵션 행사가 가능한 가격인 전환가격들의 140%를 의미한다. 해당 상품의 경우 발행자의 콜옵션 행사는 옵션 행사 고시 후 실행까지 기간 이전에 전환을 강제하는 효과를 주게된다. 이는 <Figure 4>의 최하단 붉은 실선 그래프(그림의 라벨: Conversion Boundary: With Call)에서 전환가격의 경계와 콜옵션의 행사 경계가 일치하는 모습으로 확인할 수 있다.

발행자의 콜옵션이 존재하는 경우 전환가격 재조정 조건의 유무에 따른 채권가격 차이는 <Table 2>의 Gap I 과 Gap II 에서 볼 수 있다. <Table 2>에서 (NR)은 전환가격 재조정 조건이 없다는 가정을 표시한 것이며 (NC)는 콜옵션이 없다는 가정을 표시한 것이다. (NC, NR)는 전환가격 재조정 조건과 콜옵션이 모두 없다는 가정을 표시한 것이다. Gap I 은 콜옵션이 포함된 경우의 전환가격 재조정 조건의 가치변화를 의미한다. 콜옵션 행사가 가능한 13650 KRW(현재 전환가격 9,750원의 140%)에서부터 차이가 급격히 적어지며 15,000 KRW 이상에서 두 그래프가 일치하여 콜옵션 행사로 인해 전환가격 재조정에 따른 가격의 이득이 소멸됨을 보여준다.

Gap II 는 발행자의 콜옵션이 포함되지 않은 경우의 전환가격 재조정 조건의 가치변화를 의미한다. 콜옵션의 행사가 없으므로 주가가 높아지더라도 전환가격 재조정 조건의 가치가 소멸되지 않는 것을 볼 수 있다. 이를 통해 전환가격 재조정 조건의 가치가 콜옵션의 유무에 영향을 받는다는 것을 알 수 있다. 이는 전환사채에 내재된 콜옵션과 전환권, 전환가격 재조정 조건들이 독립적으로 평가될 수 없음을 실증적으로 보인 것이다.

Kimura and Shinohara(2006)의 경우와 같이 전환가격 재조정 조건만을 포함한 경우와는 다르게 그 외 다른 조건까지 포함하는 전환사채의 평가는 내재된 조건들 간의 상호작용까지 평가 모델 내에 포함해야 한다. 이 부분에서 본 논문에서 제시한 평가 방법이 전환가격 재조정 조건과 그 외 조건들을 함께 포함한 전환사채를 평가하는 데 유용한 모델임을 알 수 있다.

**Table 2.** Convertible Bond Price with and Without Call Option and Refixing Clause in TF Model

| Stock Price | TF | TF(NR) | Gap I | TF(NC) | TF(NC, NR) | Gap II |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 8000 | 12137 | 11434 | 703 | 12653 | 11695 | 957 |
| 8500 | 12334 | 11656 | 677 | 12940 | 11987 | 953 |
| 9000 | 12519 | 11885 | 634 | 13221 | 12293 | 928 |
| 9500 | 12698 | 12119 | 579 | 13502 | 12613 | 889 |
| 10000 | 12873 | 12356 | 517 | 13789 | 12945 | 844 |
| 10500 | 13048 | 12596 | 451 | 14086 | 13289 | 797 |
| 11000 | 13224 | 12839 | 385 | 14394 | 13643 | 751 |
| 11500 | 13401 | 13084 | 318 | 14715 | 14008 | 707 |
| 12000 | 13581 | 13329 | 252 | 15048 | 14382 | 666 |
| 12500 | 13762 | 13577 | 186 | 15393 | 14764 | 629 |
| 13000 | 13945 | 13825 | 121 | 15749 | 15155 | 594 |
| 13500 | 14129 | 14073 | 56 | 16115 | 15553 | 562 |
| 14000 | 14407 | 14397 | 9 | 16491 | 15959 | 532 |
| 14500 | 14879 | 14878 | 1 | 16875 | 16370 | 504 |
| 15000 | 15386 | 15386 | 0 | 17266 | 16788 | 478 |
| 15500 | 15898 | 15898 | 0 | 17665 | 17212 | 453 |
| 16000 | 16410 | 16410 | 0 | 18071 | 17641 | 430 |
| 16500 | 16923 | 16923 | 0 | 18484 | 18075 | 408 |
| 17000 | 17436 | 17436 | 0 | 18902 | 18514 | 388 |
| 17500 | 17949 | 17949 | 0 | 19325 | 18957 | 368 |
| 18000 | 18462 | 18462 | 0 | 19754 | 19404 | 350 |
| 18500 | 18974 | 18974 | 0 | 20188 | 19856 | 332 |
| 19000 | 19487 | 19487 | 0 | 20626 | 20310 | 316 |
| 19500 | 20000 | 20000 | 0 | 21069 | 20769 | 300 |
| 20000 | 20513 | 20513 | 0 | 21515 | 21230 | 286 |

### 5.2 콜옵션의 유무에 따른 전환경계 비교

전환경계(Conversion boundaries)란 합리적인 의사결정 하에서 전환사채의 전환권 행사가 일어나는 경계를 의미한다. 이는 현재 전환사채를 전환하지 않고 보유하는 것보다 전환권을 행사하는 것이 유리한 주가의 수준을 의미한다. 일반적으로 전환권과 콜옵션이 동시에 존재할 경우 콜옵션의 전환 강제 효과로 인해 전환 경계선은 콜옵션의 행사 경계와 일치한다. 해당 상품은 전환가격의 140%이상에서 콜옵션 행사가 가능하다. 콜옵션 행사 고시 후 15일의 유예기간이 존재하는 소프트콜 조건으로서 유예기간 내 매입자에게 전환을 강제하는 효과가 있다. 발행자는 조건이 만족되는 경우 전환사채의 평가가격과 사채의 가격(또는 미리 지정된 상환가격)을 비교하여 전환사채의 평가가격이 우위에 있으면 행사를 진행한다. 이 상품은 조기상환의 경우 원금과 만기보장수익률(YTM)을 적용하여 일할 계산한 경과이자를 부가한 금액을 상환가격으로 명시하고 있다. 이는 연속 15거래일간 발행자의 보통주 종가가 전환가액의 140%를 초과하는 경우 발행자의 콜옵션 행사조건이 충족되며 원금과 경과이자를 합한 금액으로 발행자가 콜옵션을 행사할 수 있다는 뜻이다.

발행자의 콜옵션이 없는 경우와 대비하여 콜옵션이 미국식 옵션이 갖는 이연된 조기행사 프리미엄(delayed exercise compensation)(Kwok, 2008)을 소멸시키는 현상을 전환 경계선의 비교 그래프 <Figure 4>를 통하여 볼 수 있다. <Figure 4>의 세로축은 주가이고, 가로축은 날짜이다. <Figure 4>는 잔여 만기에 따른 전환 경계를 주가 수준을 통하여 보여주고 있다.

• 콜옵션이 존재하는 경우

평가일의 전환가격은 9,750 KRW이다. 가장 아래에 있는 '검은 점선 그래프'(라벨: Call Provision Boundary)는 콜옵션의 행사 경계를 나타낸다. 이 경우 TF모형의 가정에서 발행자의 콜 행사가격은 주가와 무관하기 때문에 발행자의 콜옵션 행사 경계는 전환가격의 140%인 패리티 13,650 KRW으로 고정되어 있다. 겹쳐있는 '빨간 실선 그래프'(라벨: Conversion Boundary: With Call)는 콜옵션이 있는 경우 전환경계를 표시한 그래프이다. 만기와 떨어져 있으면 콜옵션 행사 경계에 막히게 되나 가까이 가면 행사가격으로 수렴하면서 콜옵션 행사 경계보다 아래에 위치한다. 전환경계가 행사가격으로 수렴하는 이유는 만기에 가까워질수록 전환권의 조기상환 프리미엄이 줄어들기 때문이다.

• 콜옵션이 없는 경우

상단의 '검은 실선 그래프'(라벨 Conversion Boundary: With Coupon)는 발행자의 콜옵션 행사가 없음을 가정하고 사채의 쿠폰 지급은 유지시킨 그림이다. 쿠폰을 수취 전 일정 기간 동안 급격히 위로 향하는 전환경계선들은 행사하는 것보다 곧 지급되는 쿠폰을 수취 후 행사하는 것이 더 유리함을 보여준다. 바로 아래의 연속적인 '파란색 실선 그래프'(라벨 Conversion Boundary: No Coupon)는 콜옵션 행사와 사채의 쿠폰이 없음을 가정하여 생성된 전환 경계선이다. 쿠폰이 없는 경우와 비교하여 더 높은 주가의 수준에서 전환권 행사가 가능함을 보여준다. 또한 '검은 실선 그래프'와 '파란색 실선 그래프'의 격차는 만기에 가까울수록 줄어들고 있다. 이는 잔여 만기가 길수록 보유에 따른 쿠폰 획득의 기회가 크기 때문이며 이 경우 보유자는 전환권을 행사하면 미래에 획득 가능한 쿠폰을 포기해야 하므로 쿠폰이 없는 경우 대비 전환 경계가 위로 생성됨을 보여준다. 반대로 잔여 만기가 줄어들수록 쿠폰이 없는 경우의 전환 경계에 수렴하는 모습을 볼 수 있다. <Figure 4>의 가로축의 날짜는 쿠폰지급일 + 1일이다.

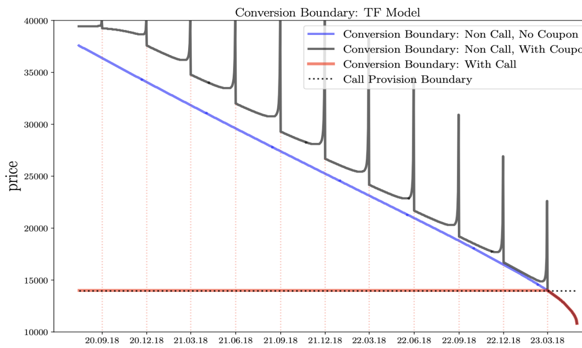



**Figure 4.** Conversion Boundaries for TF Models with and Without Call Options

## 6. 결 론

본 연구에서 주목한 점은 크게 세 가지이다.

첫째는 전환사채가 전환권, 발행자의 콜옵션, 전환가격 재조정 조건 등을 동시에 갖는 경우 전환사채의 가치평가는 각 옵션마다 독립적으로 수행할 수 없다는 점이다. 이는 5장 실증테스트에서 기술했던 것처럼 발행자의 콜옵션이 전환권 프리미엄과 전환가격 재조정 조건의 가치평가에 영향을 미치기 때문이다.

둘째는 발행자의 콜옵션과 재조정 조건을 동시에 갖는 전환사채를 평가하기에는 몬테카를로 방법보다 트리나 유한차분 같은 수치적 방법이 더 유용하다는 것이다. 몬테카를로 시뮬레이션을 이용한 방법이 복합적인 조건을 포함한 전환사채를 평가하는 데 갖는 불리한 점은 4장에서 기술되었다.

셋째는 본 논문에서 제시한 전환가격 재조정 조건이 포함된 전환사채 평가에 관한 수치적 풀이방법과 계산 알고리즘이다. 경로의존변수가 추가된 확장된 형태의 블랙-숄즈 방정식을 유도하고 이 식을 경로의존변수를 유한개로 한정한 연립 편미분 방정식계로 변환시켜 경로의존변수에 관한 가격함수의 Updating rule로 계산함을 보였다. 이 과정을 각각의 전환가격을 조건부로 갖는 가격함수들의 연속적인 업데이트 방식으로 정리하였다. 구체적으로 트리 및 유한차분방법에서 전환가격

재조정을 적용하는 수치적 알고리즘을 제시하였다.

실증분석에서 2020년 발행한 현대로템 전환사채의 예를 들어 전환가격 재조정 조건에 따라 가능한 전환가격들을 조건으로 갖는 조건부 가격들이 차례로 영향을 주어 최종가격을 계산하게 되는 과정을 그래프로 보이고 전환권과 콜옵션 그리고 전환가격 재조정 조건의 유무에 따른 시나리오별 공정가치를 분석하였다. 이를 통해 콜옵션과 전환권이 동시에 있게 될 때 전환이 유도되어 이연된 조기행사 프리미엄이 소멸되는 현상을 보였다. 해당 현상은 전환가격 재조정 조건의 가치가 콜옵션에 영향을 받는다는 것을 의미하며 전환사채에 내재된 콜옵션과 전환권, 전환가격 재조정 조건들이 독립적으로 평가될 수 없음을 실증적으로 보인 것이다. 이는 전환가격 재조정 조건만을 포함한 경우와는 다르게 그 외 다른 조건까지 포함하는 전환사채의 평가는 내재된 조건들 간의 상호작용을 고려해야 함을 의미한다. 추가적으로 발행자의 콜옵션이 없는 경우에 전환권은 사채의 이표 수취 후 행사하는 것이 유리하므로 일정 기간 전환경계선이 높게 형성됨을 실증하였다.

## 참고문헌


Björk, T. (2009), *Arbitrage Theory in Continuous Time*, Oxford University Press; 3rd Edition.

Brennan, M. J. and Schwartz, E. S. (1977), Convertible bonds: valuation and optimal strategies for call and conversion, *J. Finance*, **32** (5), 1699-1715.

Broadie, M. and Glasserman, P. (1997), Pricing American-Style Securities by Simulation, *Journal of Economic Dynamics and Control*, **21**, 1323-1352.

Cox, J. C., Ross, S, A., and Rubinstein, M. (1979), Option pricing: A simplified approach, *Journal of financial Economics*, **7**(3), 229-263.

Derman, E. (1994), *Valuing convertible bonds as derivatives*, Goldman, Sachs & Co., November.

Grant, D., Vora, G., and Weeks, D. (1996), Simulation and the Early-Exercise Option Problem, *Journal of Financial Engineering*, **5** (1996), 211-227.

Hull, J. C. (2014), *Options, Futures, and Other Derivatives*, Pearson; 9 edition.

Ingersoll, J. (1977), A contingent claim valuation of convertible securities, *J. Financ. Econ.*, **4**(3), 289-321.

Kimura, T. and Shinohara, T. (2006), Monte Carlo analysis of convertible bonds with reset clauses, *European Journal of Operational Research*, **168**(2006), 301-310.

Kjaer, M. (2004), On the pricing of cliquet options with global floor and cap, Goteborg University (Thesis for the Degree of Licentiate of Engineering).

Kwok, Y. K. (2008), *Mathematical Models of Financial Derivatives, Springer Finance*, second edition.

Longstaff, F. A. and Schwartz, E. S. (2001), Valuing american options by simulation: A simple least-squares approach, *The Review of Financial Studies*, **14**(1), 113-147.

Luo, X. and Shevchenko, P. (2013), Pricing TARNs Using a Finite Difference Method, *The Journal of Derivatives*, April 2013.

Olsen, L. *et al.* (2002), Convertible bonds: A technical introduction. Convertible Bonds Research -Tutorial, *Barclays Capital*, **24**(2002), January 2002.

Tsiveriotis, K. and Fernandes, C. (1998), Valuing convertible bonds with credit risk, *Journal of Fixed Income*, **8**, 95-102, 9.

Wilmott, P. (2007), *Paul Wilmott on Quantitative Finance*, John Wiley & Sons, Ltd.

# 부 록

## A. 격자와 백-워드 과정

Feynman–Kac formula(Björk, T.(2009))에 의하여 위너과정에서 유도된 편미분 방정식은 시간 $t$와 공간 $S$의 2변수의 함수를 계수 $A, B, C$로 갖는 2계 포물형 편미분 방정식이다. 일반형은 다음 식과 같다.

$$\frac{\partial V}{\partial t}+A\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}+B\frac{\partial V}{\partial S}+CV=0 \tag{7}$$

이를 수치적으로 계산하는 방식들 중 금융공학분야에서 가장 많이 사용하는 방법이 유한차분법이다. 미래 시점에 도달 가능한 주가를 가격과 시점을 좌표로 갖는 2차원 공간으로 나타낼 수 있다. 이를 시점 $t=0$인 현재를 포함하여 상태공간이라 한다. 수치적 방법을 적용하기 위하여 상태공간을 이산화시킨 격자공간 $D$를 정의하자. `:' 기호는 격자공간의 열 또는 행 전체를 의미한다.

$$D=S_:\times t_:=\{(S_i,t_j)\mid S_i>0,\, t_j\geq 0, i=0,\cdots,n, j=0,\cdots,m\}$$

여기서 $S_{\max}=S_n$은 허용하는 최대 주가를 의미하며 $S_{\min}=S_0$는 허용가능한 최소주가를 의미한다. 이 영역을 벗어나면 파생상품 $V$의 가격의 증분에 변화가 거의 없음을 가정할 수 있다. 이들 영역에 기초자산 $S$에 따른 $V$의 2계 미분이 0인 감마조건$\Delta(\Delta V)=0$을 주로 적용한다(Wilmott, 2007). 이제 정의구역 $D$이며 이산변수 $S_i, t_j$를 갖는 격자점에서 파생상품의 가격 $V=V(S_i,t_j)$을 $V_{i,j}$로 표기하자. 만기 시점의 값 $V_{:,m}=V(S_:,t_m)$, $S_:=\{S_0,\cdots,S_n\}$ 은 알려져 있다. 유한차분 방법은 V가 만족하는 편미분 방정식을 격자구조에 맞추어 이산화된 행렬방정식으로 바꾸어 푼다. 대표적으로 사용하는 음의 유한차분법(implicit finite difference)(Hull, 2014)의 경우 식 (7)의 이산화 식은 아래와 같다.

$$V_{i,j+1}=a_{ij}V_{i-1,j}+b_{ij}V_{i+1,j}+c_{ij}V_{i+1,j}\sim V_{:,j+1}=MV_{:,j} \tag{8}$$

여기서 행렬$M$은 대각원소 $b_{i,i}$와 좌, 우에 각각 $a_{i,i-1}, c_{i,i+1}$, $i=0,\cdots,n$을 갖는 삼중대각행렬이다. $n+1$차원 백터 $b=(b_0,\cdots,b_n)^\top$, $a=(a_0,\cdots,a_n)^\top$, $c=(c_0,\cdots,c_n)^\top$는 $M$의 대각원소, 왼쪽, 오른쪽을 각각 가르킨다. 이때 $a_0$, $c_n$는 행렬에 속하지 않으며 계산과정에서 첫 행과 마지막 행에서 나오는 식은 $V_{-1}$, $V_{n+1}$이 필요하다. 감마조건$\Delta^2V=0$에 의하여 $V_{-1}=2V_0-V_1$ 그리고 $V_{n+1}=2V_n-V_{n-1}$이 성립한다. 구체적으로 $a_0$를 포함한 $M$의 1행 $(a_0|b_0,c_0,0,\cdots,0)$와 $(V_{-1}, V_0,\cdots,V_{n+1})^\top$의 곱 $a_0V_{-1}+b_0V_0+c_0V_1$은 $(b_0+2a_0)V_0+(c_0-a_0)V_1$이다. 이는 원래 행렬 $M$에서 1행을 $(b_0+2a_0, c_0-a_0,0,\cdots,0)$으로 교체한 식이다. 마찬가지로 $c_n$를 포함한 $M$의 $n$행은 $(0,\cdots,0,a_n-c_n, b_n+2c_n)$으로 교체한다. 수정한 M을 적용하여 식 (8)의 $V_{:,j}$를 가우스 소거법 또는 LU분해[Wilmott (2007), page 1234～6]를 이용하여 행렬방정식 (9)을 계산한다.

$$M=\begin{pmatrix} b_0^* & c_0^* & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & b_1 & c_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{n-1} & b_{n-1} & c_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a_n^* & b_n^* \end{pmatrix} \tag{9}$$

여기서 $b_0^*=b_0+2a_0$, $c_0^*=c_0+a_0$, $a_n^*=a_n+c_n$, $b_n^*=b_n+2c_n$이다. 행렬방정식 $MV_{:,j}=V_{:,j+1}$의 의미는 이미 값을 알고 있는 $V_{:,j+1}$를 사용하여 $V_{:,j}$을 구하는 것이다. 이를 기호로 $V_{:,j}=M\backslash V_{:,j+1}$로 표현한다. 이를 '롤-백'(Rollback), 현금흐름과 프로비전까지 반영하는 과정을 '백-워드'(Backward)과정이라 정의하자.

### A.1 TF모형의 백-워드 과정

식 (4)과 식 (3)의 유한차분은 아래 두 조의 수열방정식으로 구성된다.

$$\frac{U_{i,j+1}-U_{i,j}}{\Delta t}+\frac{1}{2}\sigma^2S_i^2\frac{U_{i+1,j}-2U_{i,j}+U_{i-1,j}}{\Delta S^2}+r_gS_i\frac{U_{i+1,j}-U_{i-1,j}}{2\Delta S}+\frac{f_j}{\Delta t}-(r+r_c)U_{i,j}=0,$$

$$\frac{V_{i,j+1}-V_{i,j}}{\Delta t}+\frac{1}{2}\sigma^2S_i^2\frac{V_{i+1,j}-2V_{i,j}+V_{i-1,j}}{\Delta S^2}+r_gS_i\frac{V_{i+1,j}-V_{i-1,j}}{2\Delta S}+\frac{f_j}{\Delta t}-rV_{i,j}+r_cU_{i,j}=0$$

$U_{i,j+1}$에 대하여 정리하면

$$U_{i,j+1}=A_iU_{i-1,j}+B_iU_{i,j}+C_iU_{i+1,j}-f_j$$

$$A_i=-\frac{1}{2}\sigma^2S_i^2\frac{\Delta t}{\Delta S^2}+\frac{1}{2}r_gS_i\frac{\Delta t}{\Delta S}$$

$$B_i=1+\sigma^2S_i^2\frac{\Delta t}{\Delta S^2}+(r+r_c)\Delta t$$

$$C_i=-\frac{1}{2}\sigma^2S_i^2\frac{\Delta t}{\Delta S^2}-\frac{1}{2}r_gS_i\frac{\Delta t}{\Delta S}$$

$V_{i,j+1}$에 대하여 정리하면

$$V_{i,j+1}=D_iV_{i-1,j}+E_iV_{i,j}+F_iV_{i+1,j}-U_{i,j}\,dt-f_j$$

$$D_i = -\frac{1}{2}\sigma^2 S_i^2 \frac{\Delta t}{\Delta S^2} + \frac{1}{2} r_g^j S_i \frac{\Delta t}{\Delta S}$$

$$E_i = 1 + \sigma^2 S_i^2 \frac{\Delta t}{\Delta S^2} + r\Delta t$$

$$F_i = -\frac{1}{2}\sigma^2 S_i^2 \frac{\Delta t}{\Delta S^2} - \frac{1}{2} r_g^j S_i \frac{\Delta t}{\Delta S}.$$

■ $V$의 계산과정: TF모형

- 식 (9)와 같은 행렬로 정리하여 각각 $M_U$, $M_V$라 두자.
- $U_{:,m} \leftarrow B(T), V_{:,m} \leftarrow B(T)$
- 시간 인덱스 $j = m-1, \cdots, 0$ 를 역으로 진행하면서 아래의 백-워드 과정을 진행한다.

1) 롤-백 $U_{:,m} \leftarrow M_U \backslash U_{:,j+1}, V_{:,m} \leftarrow M_V \backslash V_{:,j+1}$
2) COCB반영 $V_{:,j} \leftarrow V_{:,j} - r_c \cdot U_{:,j} \Delta t$
3) 현금흐름 $V_{:,j} \leftarrow V_{:,j} + f_j, U_{:,j} \leftarrow U_{:,j} + f_j$
4) 프로비전

$$\forall i, V_{i,j} \leftarrow \max\{\text{parity}, \text{put}, \min(V_{i,j}, call)\}$$

이 때 call, parity, put 변수는 아래의 조건에 따른다.

if $t_j \in$call-times then call$\leftarrow BC_j$ else call$\leftarrow \infty$

if $t_j \in$conv-times then parity$\leftarrow P_j$ else parity$\leftarrow 0$

## 저자소개

**김승환 :** 전남대학교 경제학과와 철학과에서 2012년 학사학위를 취득하고 전남대학교 수학/통계학과 대학원에서 석박통합과정에 재학중이다. 연구 분야는 금융공학이다.

**임현철 :** 서울대학교 수학과에서 1989년 학사, 1992년 석사학위를 취득하고 연세대학교에서 금융수학 전공 박사학위를 취득하였다. KOSCOM, 삼성자산운용, KB은행 트레이딩부 팀장으로 재직하였으며 2018년부터 전남대학교 수학과 교수로 재직하고 있다. 연구 분야는 금융공학이다.